

Издержки от простоя обслуживающего канала (причала) в сутки равны $q_2 = 712$ руб., издержки от простоя требования (судна) в очереди — $q_1 = 6000$ руб.

Определим оптимальное число причалов, при котором функция $Z_n(\alpha)$ достигает минимума. Решая уравнение (3) при $n = 5$ и 6 , получим $\alpha_{5,6} = 2,5$ и $\alpha_{6,7} = 3,2$. Так как $\alpha_0 = 3$, то $\alpha_0 \in (\alpha_{5,6}, \alpha_{6,7})$. Следовательно, оптимальное число причалов равно 6 . Сравним значения сумм общих издержек для $n = 5, 6$ и 7 . Имеем $Z_5(3) = 3500$ руб./сутки, $Z_6(3) = 2700$ руб./сутки, $Z_7(3) = 3000$ руб./сутки. Таким образом, функция суммы общих издержек достигает минимума при шести причалах.

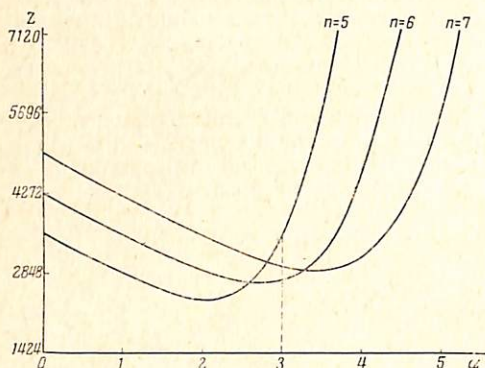


Рис. 1

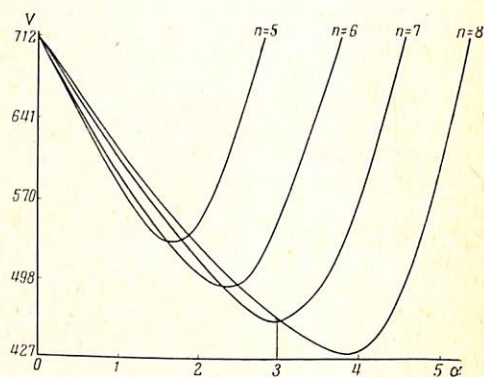


Рис. 2

Для определения оптимального числа причалов, при котором минимизируется функция $V_n(\alpha)$, воспользуемся уравнением (4), решая которое при $n = 6$ и 7 , будем иметь $\gamma_{6,7} = 2,26$ и $\gamma_{7,8} = 3,05$. Так как $\alpha_0 = 3$, то $\alpha_0 \in (\gamma_{6,7}, \gamma_{7,8})$ и оптимальное число причалов, при котором минимизируется функция $V_n(\alpha)$, равно 7 . Это подтверждается и сравнением значений сумм удельных издержек, так как

$$V_6(3) = 550 \text{ руб./сутки}, \quad V_7(3) = 450 \text{ руб./сутки}, \quad V_8(3) = 460 \text{ руб./сутки}.$$

На практике, как указывает Гнеденко [2], следует отдать предпочтение сооружению в порту семи причалов. Это объясняется возможным дополнительным ростом грузооборота порта, необходимостью периодических ремонтов причалов, метеорологических условиями и т. д. При предлагаемом методе расчета вариантов в семь причалов получится расчетным путем при выборе в качестве критерия оптимальности минимума суммы удельных издержек.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложение. М., «Мир», 1965.
2. Б. В. Гнеденко. Теория массового обслуживания. Экономическая газета, 1965, № 5.

Поступила в редакцию
30 VIII 1965

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

В. Г. АРАНОВИЧ

(Москва)

Экономически решаемой ниже задаче соответствует следующая макроэкономическая модель оптимального перспективного планирования. Ограничения модели могут быть представлены динамическими уравнениями межотраслевого баланса с капиталовложениями по фондопроизводящим отраслям в качестве управляющих переменных. Квадратичный критерий представляет собой функцию общественного благо-

состояния с изменяющимися предельными предпочтениями (линейному случаю соответствуют постоянные предельные предпочтения в отношении различных конфликтных и несоизмеримых между собой социально-экономических целей).

Дан объект, который описывается системой линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{r=1}^k b_{ir}u_r, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где (a_{ij}) и (b_{ir}) — постоянные, действительные $(n \times n)$ и $(n \times k)$ матрицы, а u_r ($r = 1, \dots, k$) — допустимые управления, определенные в замкнутом k -мерном кубе

$$|u_r| \leq 1, \quad r = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Требуется найти такие управления $u_r(t)$ из класса допустимых, при которых объект переходил бы из начального состояния $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ в конечное состояние $\{0, 0, \dots, 0\}$, при этом качество процесса управления характеризуется функционалом

$$J = \int_0^t \left[\sum_{i,j=1}^n h_{ij}x_i x_j \right] d\tau \quad (3)$$

с постоянной, действительной матрицей (h_{ij}) и не фиксированным временем t , который в свою очередь должен принимать максимальное значение.

Если все характеристические числа λ_ξ ($\xi = 1, \dots, n$) матрицы (a_{ij}) различны между собой*, тогда [1] с помощью невырожденного линейного преобразования

$$y_\xi = \sum_{j=1}^n c_{\xi j}x_j, \quad \xi = 1, \dots, n \quad (4)$$

система дифференциальных уравнений (1) приводится к виду

$$\dot{y}_\xi = \lambda_\xi y_\xi + \sum_{i=1}^n c_{\xi i} \left[\sum_{r=1}^k b_{ir}u_r \right] \quad \xi = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где коэффициенты $c_{\xi i}$ определяются с точностью до произвольных постоянных из системы линейных уравнений

$$\lambda_\xi c_{\xi j} = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{\xi i}, \quad \xi, j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Соответственно функционал (3) принимает вид

$$J = \int_0^t \left[\sum_{\xi, \eta=1}^n \gamma_{\xi \eta} y_\xi y_\eta \right] d\tau, \quad (7)$$

где коэффициенты $\gamma_{\xi \eta}$ определяются линейными уравнениями

$$\sum_{\xi, \eta=1}^n (c_{\xi j}c_{\eta i})\gamma_{\xi \eta} = h_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрица (a_{ij}) — действительная, так что в последовательности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ наряду с каждым комплексным собственным значением λ_ξ имеется комплексно-сопряженное

* В случае, когда матрица (a_{ij}) может иметь кратные собственные значения [2], преобразование (4) можно выбрать таким образом, чтобы в новых переменных y_ξ однородная система дифференциальных уравнений (1) принимала жордановый вид

$$\dot{y}_1 = \lambda' y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda' y_2 + y_3, \quad \dots, \quad \dot{y}_{k-1} = \lambda' y_{k-1} + y_k, \quad \dot{y}_k = \lambda' y_k, \quad (*)$$

где k — кратность собственного значения λ' . Каждому другому кратному собственному значению λ'' соответствует аналогичная система уравнений (*), которую легко решить.

ное ему значение $\bar{\lambda}_i = \lambda_{\bar{i}}$, поэтому система (6) для комплексно-сопряженных собственных значений определяет комплексно-сопряженные коэффициенты $c_{\bar{i}j} = \bar{c}_{ij}$.

С помощью преобразования (4) осуществлен переход от действительных переменных x_i ($i = 1, \dots, n$) к таким переменным y_{ξ} ($\xi = 1, \dots, n$), часть которых, соответствующая действительным собственным значениям, действительна, а остальные, соответствующие комплексно-сопряженным собственным значениям, комплексно-сопряжены. Коэффициенты $\gamma_{\xi\eta}$ в функционале (7) в свою очередь обладают тем свойством, что их сумма $\sum_{\xi, \eta=1}^n \gamma_{\xi\eta}$ представляет собой действительное число.

Введем нулевую координату y_0 так, чтобы

$$\dot{y}_0 = \sum_{\xi, \eta=1}^n \gamma_{\xi\eta} y_{\xi} y_{\eta}. \quad (8)$$

По Понтрягину [3], гамильтониан H примет вид

$$H = \psi_0 \sum_{\xi, \eta=1}^n \gamma_{\xi\eta} y_{\xi} y_{\eta} + \sum_{\xi=1}^n \psi_{\xi} \left[\lambda_{\xi} y_{\xi} + \sum_{i=1}^n c_{\xi i} \left(\sum_{r=1}^k b_{ir} u_r \right) \right]. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения для вспомогательных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\psi}_{\xi} &= -\psi_0 \sum_{\eta=1}^n (\gamma_{\xi\eta} + \gamma_{\eta\xi}) y_{\eta} - \lambda_{\xi} \psi_{\xi}, \quad \xi = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Вспомогательные функции ψ_{ξ} ($\xi = 1, \dots, n$), так же как и переменные y_{ξ} ($\xi = 1, \dots, n$), состоят из действительных функций, соответствующих действительным собственным значениям, и комплексно-сопряженных функций, соответствующих комплексно-сопряженным собственным значениям, поэтому преобразование

$$\psi_i = \sum_{\xi=1}^n c_{\xi i} \psi_{\xi}, \quad i = 1, \dots, n,$$

аналогичное преобразованию (4), осуществляет переход к таким действительным переменным ψ_i ($i = 1, \dots, n$), которые в свою очередь являются вспомогательными функциями для координат x_i ($i = 1, \dots, n$).

Из принципа максимума следует, что оптимальные управления должны иметь вид

$$u_r^* = \text{sign} \left[\sum_{i=1}^n b_{ir} \left(\sum_{\xi=1}^n c_{\xi i} \psi_{\xi} \right) \right], \quad r = 1, \dots, k. \quad (11)$$

Таким образом, имеем систему из $2n + 1$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций y_{ξ} и вспомогательных функций ψ_{ξ} , которые определяют оптимальные управления (11)

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{\xi} &= \lambda_{\xi} y_{\xi} + \sum_{i=1}^n c_{\xi i} \left[\sum_{r=1}^k b_{ir} u_r \right], \\ \dot{\psi}_0 &= 0 \\ \dot{\psi}_{\xi} &= -\lambda_{\xi} \psi_{\xi} - \psi_0 \sum_{\eta=1}^n (\gamma_{\xi\eta} + \gamma_{\eta\xi}) y_{\eta}, \quad \xi = 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Граничными условиями для уравнения (12) будут величины

$$\vec{y}(0) = \{y_1^0, \dots, y_n^0\}, \quad \vec{y}(t) = \{0, \dots, 0\}, \quad \vec{\psi}(0) = \{\psi_1^0, \dots, \psi_n^0\}, \quad (13)$$

которые получаются из линейного преобразования (4).

В сопряженном пространстве $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ определены K гиперплоскостей Γ_r

$$\sum_{i=1}^n b_{ir} \left(\sum_{\xi=1}^n c_{\xi i} \psi_{\xi} \right) = 0, \quad r = 1, \dots, k, \quad (14)$$

которые разделяют это сопряженное пространство на 2^k подпространств, в каждом из которых справедливы свои дифференциальные уравнения (12).

Как только фазовая траектория в сопряженном пространстве попадает на одну из гиперплоскостей Γ_r , так происходит переключение соответствующего управления u_r .

Разбиение сопряженного пространства $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ на подпространства гиперплоскостями Γ_r взаимно однозначно соответствует разбиению основного пространства $\{y_1, \dots, y_n\}$ на подпространства гиперповерхностями $\bar{\Gamma}_r$. В каждом подпространстве управления принимают вполне определенные постоянные значения, поэтому в нем система уравнений (12) есть не что иное, как неоднородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Решая первую группу n дифференциальных уравнений для y_{ξ} , получаем

$$y_{\xi}(t) = l_{\xi}(t^* + 0) e^{\lambda_{\xi} t} + D_{\xi}, \quad \xi = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где первая часть представляет собой решение однородной системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику поведения объекта в каком-либо подпространстве основного пространства $\{y_1, \dots, y_n\}$, а вторая часть есть неоднородный добавок

$$D_{\xi} = - \frac{1}{\lambda_{\xi}} \sum_{i=1}^n c_{\xi i} \left\{ \sum_{r=1}^k b_{ir} u_r^* \right\}, \quad (16)$$

показывающий, в каком именно подпространстве происходит движение объекта, так как вполне определенный набор значений величин u_r^* определяет однозначно подпространство основного пространства $\{y_1, \dots, y_n\}$.

В момент t^* переключения управления u_r^* должно выполняться условие непрерывности

$$y_{\xi}(t^* - 0) = y_{\xi}(t^* + 0), \quad \xi = 1, \dots, n, \quad (17)$$

которое влечет за собой изменение постоянных коэффициентов $l_{\xi}(t^* - 0)$. Их новые значения $l_{\xi}(t^* + 0)$ находятся из выражений

$$l_{\xi}(t^* + 0) = \frac{y_{\xi}(t^*) + D_{\xi}(t^* + 0)}{y_{\xi}(t^*) + D_{\xi}(t^* - 0)} l_{\xi}(t^* - 0), \quad \xi = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Решая вторую группу n дифференциальных уравнений для ψ_{ξ} и исключая из решений время t , получим

$$\psi_0 = -1 = \text{const},$$

$$\psi_{\xi}(y_1, \dots, y_n) =$$

$$= \left\{ \psi_{\xi}^0 + \sum_{\eta=1}^n (\gamma_{\xi\eta} + \gamma_{\eta\xi}) \left[\frac{l_{\eta}}{2(\lambda_{\xi} + \lambda_{\eta})} \left(\frac{y_{\xi} - D_{\xi}}{l_{\xi}} \right)^2 / \frac{y_{\eta} - D_{\eta}}{l_{\eta}} \right]^2 + \frac{D_{\eta}}{2\lambda_{\xi}} \left(\frac{y_{\xi} - D_{\xi}}{l_{\xi}} \right)^2 \right\} \cdot \left(\frac{l_{\xi}}{y_{\xi} - D_{\xi}} \right) \quad \xi = 1, \dots, n. \quad (19)$$

В выражениях (19) величины ψ_{ξ}^0 есть не что иное, как начальные значения вспомогательных величин ψ_{ξ} . Задавая различные значения ψ_{ξ}^0 , можно получить все семейство фазовых траекторий $y_{\xi}(t)$ ($\xi = 1, \dots, n$), выходящих из точки $y_{\xi}(0)$ ($\xi = 1, \dots, n$). Из каждой начальной точки y_{ξ}^0 ($\xi = 1, \dots, n$) основного пространства может выходить 2^k траекторий, и каждая траектория отвечает тому подпространству сопряженного пространства, в котором находятся начальные значения вспомогательных величин ψ_{ξ}^0 ($\xi = 1, \dots, n$). Задавая вполне определенные начальные значения ψ_{ξ}^0 ($\xi = 1, \dots, n$), тем самым из семейства 2^k траекторий выбираем вполне определенную траекторию, двигаясь вдоль которой в силу условия непрерывности (17) осуществляем оптимальный процесс управления объектом. При этом объект может и не попасть в начало координат. Очевидно, можно выбрать такое подпространство сопряженного пространства, в котором, задавая начальные значения ψ_{ξ}^0 ($\xi =$

$= 1, \dots, n$), можно попасть в ε -окрестность начала координат. После этого можно так подправить величины ψ_{ξ}^0 ($\xi = 1, \dots, n$), чтобы объект попал в точку $y_{\xi}(t) = 0$ ($\xi = 1, \dots, n$). Сам процесс выбора начальных значений для вспомогательных величин ψ_{ξ} ($\xi = 1, \dots, n$) (выбор соответствующего подпространства) представляет собой вполне самостоятельную задачу, которая в данной работе не рассматривалась. Нетрудно видеть, что оптимальное управление (11) осуществляет регулярный синтез, поэтому выполнение принципа максимума является и достаточным условием оптимальности, т. е. существует единственная оптимальная траектория, дающая экстремум функционалу (7) [4, 5].

Заменой в выражениях (19) переменных y_{ξ} ($\xi = 1, \dots, n$) соответствующими выражениями (4) можно перейти к первоначальным координатам x_i ($i = 1, \dots, n$), при этом функционал (3) также принимает экстремальное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1965.
2. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Физматгиз, 1966.
3. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
4. В. Г. Болтянский. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Известия АН СССР, серия математическая, 1964, т. 28, № 3.
5. В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
20 II 1967

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

ЛЕТНЯЯ ШКОЛА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ
В АЛМА-АТЕ

Всесоюзная летняя школа по математическому программированию работала в г. Алма-Ате с 22 августа по 6 сентября 1968 г. Она была организована Научным Советом АН СССР по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством», ЦЭМИ АН СССР и Институтом математики и механики АН КазССР.

В работе школы приняло участие более двухсот человек — в основном научные работники, преподаватели ВУЗов и аспиранты из различных республик Союза.

Участники школы прослушали семь циклов лекций, каждый из которых занял 6—8 часов. Ежедневно читались, как правило, две двухчасовые лекции. Такой распорядок работы школы давал возможность слушателям обмениваться мнениями и результатами собственных работ, проводить семинары по более узким вопросам.

Лекционные курсы охватывали различные направления математического программирования и некоторые смежные вопросы. Лекторами являлись ученые, непосредственно работающие в соответствующих областях науки. Таким образом, слушатели школы получили информацию из самых авторитетных источников.

Н. Х. Розов (Москва) прочитал курс по основам теории оптимального управления. Наиболее подробно была разобрана линейная задача оптимального управления.

Н. Х. Розов прочел для желающих также дополнительную лекцию, в которой сделал обзор состояния теории оптимального управления в настоящее время.

Четыре лекции Б. Г. Питтеля (Ленинград) были посвящены экономико-математическим моделям. Лектор начал с наиболее простой линейной производственной модели Леонтьева, остановился на обобщенной модели Леонтьева, а затем достаточно полно изложил теорию модели расширяющейся экономики фон Неймана — Гейла. В лекциях были также изложены так называемые магистральные теоремы (Радiera — Никкайдо, Моришима и Мак-Кинси), касающиеся асимптотических свойств динамической модели экономики.

Задачи теории приближений можно отнести к области, смежной с математиче-

ским программированием, так как в настоящее время имеется значительная общность в использовании двойственного подхода при построении обеих математических теорий. Эта точка зрения была положена в основу курса С. Я. Хавинсона (Москва). В лекциях были сформулированы соотношения двойственности для задач наилучшего приближения элементами выпуклого множества в произвольном нормированном пространстве. С помощью этих соотношений получен ряд результатов теории наилучшего приближения.

Лекции Е. Г. Гольштейна (Москва) были посвящены основным вопросам теории выпуклого программирования. Главным методом исследования здесь явился двойственный подход. В курсе был принят нетрадиционный путь изложения, основанный на известной теореме фон Неймана для антагонистических игр.

Ю. Ю. Финкельштейн и С. С. Лебедев (Москва) сделали обзор вычислительных методов дискретного программирования. Здесь нашли отражение как методы отсеечения, так и более новые методы, основанные на идеях упорядоченного перебора вариантов.

Экстремальные сетевые задачи — такова тема курса, прочитанного И. А. Радчик (Киев). В лекциях были подробно разобраны задача о максимальном потоке, транспортная задача на сети, задача о минимальной стоимости проекта (основная задача сетевого планирования).

А. И. Вересков (Москва) прочитал лекции по стохастическому программированию, которое является сравнительно слабо развитым разделом математического программирования. Были разобраны двухэтапные задачи стохастического программирования, линейные задачи со случайной правой частью и со случайной матрицей, вопросы устойчивости в задачах линейного программирования.

В решении, принятом единодушно всеми участниками, отмечено, что школа способствовала росту уровня научных кадров, и выражена надежда на продолжение практики организации подобных школ в других республиках страны.

Б. П. Алейников,
М. М. Беркович