тельную значимость, существенность этой ветви по сравнению с другими ветвями и, следовательно, целесообразность ее наличия в сети. Наличие той ветви, которая оказалась в некотором смысле слабо загруженной, считаем нецелесообразным и ее можно исключить из сети, сэкономив при этом на стоимости этой ветви и потерпев незначительный убыток в результате повышения эксплуатационных затрат*.

На основе изложенных выше соображений алгоритм построения оптимальной транспортной сети может быть представлен в виде многошагового процесса исключения ветвей. На каждом шаге производится исключение той ветви, которая дает максимальную экономию затрат. Процедура исключения прекращается, когда ни одну ветвь нельзя будет исключить или из условия связности графа сети, или из условия невозрастания затрат. Может оказаться целесообразным даже одновременное исключение нескольких ветвей из некоторого неполного графа.

В постановке задачи мы предполагали, что стоимости производства во всех пунктах потребления одинаковы. Если стоимости продукции будут разными, то это требование, по-видимому, можно учесть, если воспользоваться приемом, предложенным в [9]. Он заключается в преобразовании исходной транспортной сети к новому виду, при котором процесс производства отображается в виде перевозок на соответствующих дугах. В этом случае задача сводится к нахождению оптимального плана только перевозок в новой, расширенной сети.

Некоторая модификация данного метода позволяет также учесть ограничение по мощности у пунктов производства.

Описанный алгоритм был реализован в программе, составленной в Московском инженерно-экономическом институте им. С. Орджоникидзе для ЭЦВМ УРАЛ-4 и предназначенной для построения оптимальной конфигурации электрической сети.

Автор выражает благодарность Ю. Ю. Финкельштейну за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Корбут. Целочисленные задачи линейного программирования. В сб. Экономико-математические методы, вып. III. М., «Наука», 1965.
2. Д. Б. Юдин. Методы количественного анализа сложных систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 1.
3. И. Б. Моцкус. Метод целочисленно-линейного программирования некоторых задач оптимального проектирования. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1963, № 4.
4. R. Gomori. An algorithm for integer solutions to linear programs. Princeton IBM Mathem. Res. Projekt. Thechn. Rept., 1958, N 1.
5. В. Л. Леонас, И. Б. Моцкус. Метод последовательного поиска в оптимизации производственных систем и сетей. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1965, № 1.
6. А. А. Корбут, Н. А. Малинников. Приближенное решение некоторых неоднородных моделей размещения. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 3.
7. А. А. Глазунов. Электрические сети и системы. М., Госэнергоиздат, 1960.
8. Л. П. Падалко. О методе построения оптимальной конфигурации электрической сети с использованием ЭЦВМ. Изв. высш. учебн. завед. СССР, Энергетика, 1965, № 12.
9. В. И. Калика, В. А. Маш. Задачи оптимального размещения производства. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 3.

Поступила в редакцию
9 VII 1966

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОСНОВЕ МИНИМУМА ИЗДЕРЖЕК

Ф. Д. ФЕСЕНКО, Ю. Н. ШУЛЬГА

(Донецк)

При построении экономико-математической модели системы обслуживания одним из главных является вопрос правильного выбора критерия оценки оптимального режима ее работы.

---

* В статье [8] изложены инженерные, эвристические соображения о целесообразности использования такого приема применительно к электрической сети.

Весьма важными, на наш взгляд, критериями, характеризующими режим работы системы обслуживания, могут служить: 1) сумма общих издержек; 2 сумма удельных издержек.

Под суммой общих издержек будем понимать сумму издержек от простоя обслуживающих каналов и требований в очереди, исчисленную в единицу времени.

Под суммой удельных издержек будем понимать сумму, состоящую из издержек от простоя обслуживающих каналов, отнесенную к общему числу каналов системы, и издержек от простоя требований в очереди, отнесенных к среднему числу требований, одновременно находящихся в системе, исчисленную в единицу времени.

В настоящей статье рассматривается разомкнутая многоканальная система массового обслуживания [1, стр. 74—97], для которой функция суммы общих издержек имеет вид

$$Z_n(\alpha) = \bar{\nu}_n(\alpha) q_1 + \bar{\rho}_n(\alpha) q_2, \tag{1}$$

где $\bar{\nu}_n(\alpha)$ — средняя длина очереди; $\bar{\rho}_n(\alpha)$ — среднее число свободных каналов; n — общее число каналов; $\alpha = \lambda\bar{\tau}$ — коэффициент использования канала; λ — интенсивность входящего потока; τ — среднее время обслуживания одного требования; $\tilde{q}_1$ — издержки от простоя требования в очереди; q_2 — издержки от простоя обслуживающего канала в единицу времени.

Функция суммы удельных издержек может быть записана в виде

$$V_n(\alpha) = \frac{\bar{\nu}_n(\alpha) q_1}{\bar{\nu}_n(\alpha) + \alpha} + \frac{\bar{\rho}_n(\alpha) q_2}{n}. \tag{2}$$

Оптимальное число каналов $n = n_0$, при котором $Z_n(\alpha)$ достигает минимума, определяется из уравнения

$$\bar{\nu}_n(\alpha) - \bar{\nu}_{n+1}(\alpha) - \frac{q_2}{q_1} = 0, \tag{3}$$

корнем которого является значение абсциссы $(\alpha_{n,\,n+1})$ точки пересечения графиков функций $Z_n(\alpha)$ и $Z_{n+1}(\alpha)$ (рис. 1). Для определения оптимального числа каналов, при котором функция $V_n(\alpha)$ достигает минимума, можно воспользоваться уравнением

$$n(n+1)\frac{\bar{\nu}_n(\alpha) - \bar{\nu}_{n+1}(\alpha)}{[\bar{\nu}_n(\alpha) + \alpha]\,[\bar{\nu}_{n+1}(\alpha) + \alpha]} - \frac{q_2}{q_1} = 0, \tag{4}$$

корнем которого является значение абсциссы $(\gamma_{n,\,n+1})$ точки пересечения графиков функций $V_n(\alpha)$ и $V_{n+1}(\alpha)$ (рис. 2). Здесь

$$\nu_n(\alpha) = \alpha^{n+1}\left[(n-1)!\,(n-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\alpha^k\right]^{-1}. \tag{5}$$

Пусть $\alpha = \alpha_0$ — коэффициент использования канала. Если $n = n_0$ — оптимальное число каналов, при котором функция $Z_n(\alpha)$ достигает минимума, то для α_0 должно выполняться условие $\alpha_0 \in (\alpha_{n_0-1,\,n_0}, \alpha_{n_0,\,n_0+1})$. Аналогично определяется оптимальное число каналов, при котором функция $V_n(\alpha)$ достигает минимума. Здесь должно выполняться условие $\alpha_0 \in (\gamma_{n_0-1,\,n_0}, \gamma_{n_0,\,n_0+1})$.

В качестве иллюстрации предложенного метода определения оптимального режима работы системы обслуживания при помощи нахождения минимума сумм общих и удельных издержек приведем решение задачи об определении количества причалов в порту с заданным грузооборотом.

Пусть годовой грузооборот порта определен в 1 100 000 *т* генеральных грузов; средняя загрузка судна 5000 *т*; навигационный период 365 суток; годовая стоимость содержания причала 260 000 руб.; средняя длительность обработки судна 5 суток. Необходимо определить, какое количество причалов должен иметь порт, чтобы обеспечить бесперебойную работу по погрузке и разгрузке судов при минимальных издержках (общих и удельных).

Рабочая гипотеза, которой мы будем следовать, состоит в том, что поток требований (судов) на обслуживание подчинен закону Пуассона, время обслуживания — показательное.

Определим параметр потока и среднее время обслуживания. Имеем

$$\lambda = \frac{1\,100\,000}{365 \cdot 5000} \approx 0{,}6 \textit{ судов/сутки} \quad \tau = 5 \textit{ сутки/судно}.$$

Издержки от простоя обслуживающего канала (причала) в сутки равны $q_2 = 712$ руб., издержки от простоя требования (судна) в очереди — $q_1 = 6000$ руб.

Определим оптимальное число причалов, при котором функция $Z_n(\alpha)$ достигает минимума. Решая уравнение (3) при $n = 5$ и 6, получим $\alpha_{5,6} = 2{,}5$ и $\alpha_{6,7} = 3{,}2$. Так как $\alpha_0 = 3$, то $\alpha_0 \in (\alpha_{5,6}, \alpha_{6,7})$. Следовательно, оптимальное число причалов равно 6. Сравним значения сумм общих издержек для $n = 5$, 6 и 7. Имеем $Z_5(3) = 3500$ руб./сутки, $Z_6(3) = 2700$ руб./сутки, $Z_7(3) = 3000$ руб./сутки. Таким образом, функция суммы общих издержек достигает минимума при шести причалах.

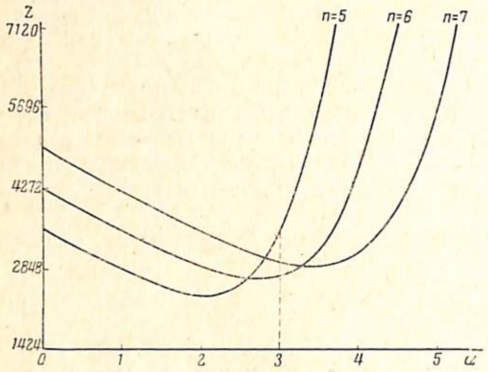

Рис. 1

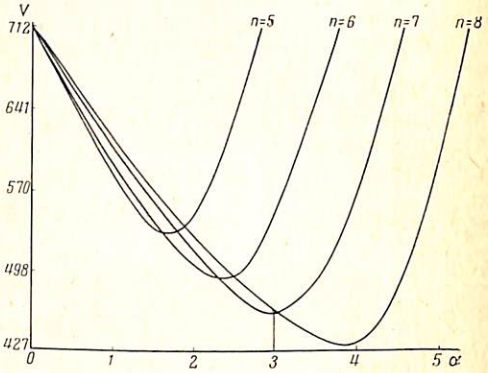

Рис. 2

Для определения оптимального числа причалов, при котором минимизируется функция $V_n(\alpha)$, воспользуемся уравнением (4), решая которое при $n = 6$ и 7, будем иметь $\gamma_{6,7} = 2{,}26$ и $\gamma_{7,8} = 3{,}05$. Так как $\alpha_0 = 3$, то $\alpha_0 \in (\gamma_{6,7}\ \gamma_{7,8})$ и оптимальное число причалов, при котором минимизируется функция $V_n(\alpha)$, равно 7. Это подтверждается и сравнением значений сумм удельных издержек, так как

$$V_6(3) = 550 \text{ руб./сутки}, \quad V_7(3) = 450 \text{ руб./сутки}, \quad V_8(3) = 460 \text{ руб./сутки}.$$

На практике, как указывает Гнеденко [2], следует отдать предпочтение сооружению в порту семи причалов. Это объясняется возможным дополнительным ростом грузооборота порта, необходимостью периодических ремонтов причалов, метеорологическими условиями и т. д. При предлагаемом методе расчета вариант в семь причалов получится расчетным путем при выборе в качестве критерия оптимальности минимума суммы удельных издержек.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложение. М., «Мир», 1965.
2. Б. В. Гнеденко. Теория массового обслуживания. Экономическая газета, 1965, № 5.

Поступила в редакцию
30 VIII 1965

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

В. Г. АРАНОВИЧ

(Москва)

Экономически решаемой ниже задаче соответствует следующая макроэкономическая модель оптимального перспективного планирования. Ограничения модели могут быть представлены динамическими уравнениями межотраслевого баланса с капиталовложениями по фондопроизводящим отраслям в качестве управляющих переменных. Квадратичный критерий представляет собой функцию общественного благосостояния с изменяющимися предельными предпочтениями (линейному случаю соответствуют постоянные предельные предпочтения в отношении различных конфликтных и несоизмеримых между собой социально-экономических целей).

Дан объект, который описывается системой линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{r=1}^{k} b_{ir}u_r, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где (a_{ij}) и (b_{ir}) — постоянные, действительные $(n \times n)$ и $(n \times k)$ матрицы, а u_r $(r = 1, \ldots, k)$ — допустимые управления, определенные в замкнутом k-мерном кубе

$$|u_r| \leqslant 1, \quad r = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Требуется найти такие управления $u_r(t)$ из класса допустимых, при которых объект переходил бы из начального состояния $\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ в конечное состояние $\{0, 0, \ldots, 0\}$, при этом качество процесса управления характеризуется функционалом

$$J = \int_0^t \left[\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}x_ix_j \right] d\tau \tag{3}$$

(с постоянной, действительной матрицей (h_{ij}) и не фиксированным временем t), который в свою очередь должен принимать максимальное значение.

Если все характеристические числа λ_ξ $(\xi = 1, \ldots, n)$ матрицы (a_{ij}) различны между собой *, тогда [1] с помощью невырожденного линейного преобразования

$$y_\xi = \sum_{j=1}^{n} c_{\xi j}x_j, \qquad \xi = 1, \ldots, n \tag{4}$$

система дифференциальных уравнений (1) приводится к виду

$$\dot{y}_\xi = \lambda_\xi y_\xi + \sum_{i=1}^{n} c_{\xi i} \left[\sum_{r=1}^{n} b_{ir}u_r \right] \quad \xi = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где коэффициенты $c_{\xi i}$ определяются с точностью до произвольных постоянных из системы линейных уравнений

$$\lambda_\xi c_{\xi j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{\xi j}, \quad \xi; j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Соответственно функционал (3) принимает вид

$$J = \int_0^t \left[\sum_{\xi;\eta=1}^{n} \gamma_{\xi\eta}y_\xi y_\eta \right] d\tau, \tag{7}$$

где коэффициенты $\gamma_{\xi\eta}$ определяются линейными уравнениями

$$\sum_{\xi;\eta=1}^{n} (c_{\xi j}c_{\eta i})\gamma_{\xi\eta} = h_{ij}, \quad i; j = 1, \ldots, n.$$

Матрица (a_{ij}) — действительная, так что в последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ наряду с каждым комплексным собственным значением λ_ξ имеется комплексно-сопряжен-

---

* В случае, когда матрица (a_{ij}) может иметь кратные собственные значения [2], преобразование (4) можно выбрать таким образом, чтобы в новых переменных y_ξ однородная система дифференциальных уравнений (1) принимала жордановый вид

$$\dot{y}_1 = \lambda' y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda' y_2 + y_3, \; \ldots, \; \dot{y}_{k-1} = \lambda' y_{k-1} + y_k, \quad \dot{y}_k = \lambda' y_k, \tag{*}$$

где k — кратность собственного значения λ'. Каждому другому кратному собственного значения λ'' соответствует аналогичная система уравнений (*), которую легко решить.