Вычисления по формулам (6), (7), (8) дают

$$M\{\vartheta_i\} = t_{1i} + (t_{2i} - t_{1i}) \exp(-^7/_8) \cong t_{1i} + 0{,}417(t_{2i} - t_{1i}), \qquad (7')$$

$$D\{\vartheta_i\} = (t_{2i} - t_{1i})^2 \exp(-^9/_4) [\exp(^1/_4) - 1] \cong 0{,}0493(t_{2i} - t_{1i})^2, \qquad (8')$$

$$M\{\vartheta_i\vartheta_j\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[t_{1i} + (t_{2i} - t_{1i})\exp(z_i/2 - 1)][t_{1j} + (t_{2j} - t_{1j})\exp(z_j/2 - 1)] \times$$

$$\times (2\pi)^{-1}(1 - \rho_{ij}^2)^{-1/2} \exp\{-[2(1 - \rho_{ij}^2)]^{-1}(z_i^2 - 2\rho_{ij}z_iz_j + z_j^2)\}\, dz_i dz_j =$$
$$= t_{1i}t_{1j} + 0{,}417t_{1j}(t_{2i} - t_{1i}) + 0{,}417t_{1i}(t_{2j} - t_{1j}) + (0{,}417)^2(t_{2i} - t_{1i})^2 \exp(0{,}25\rho_{ij}). \qquad (6')$$

Поэтому формула (5) записывается в виде

$$r_{ij} \cong 3{,}5\,[\exp(0{,}25\rho_{ij}) - 1] \qquad (5')$$

и

$$\rho_{ij} \cong 4 \ln\,(0{,}284r_{ij} + 1). \qquad (11)\,^*$$

Наименьшее значение r_{ij}, соответствующее $\rho_{ij} = -1$, равно $-0{,}77 > -1$. Это ограничение естественным образом вытекает из несимметрии нелинейного преобразования (10) и иллюстрирует замечание к п. 4° общего описания метода. (При необходимости имитировать работы ϑ_i и ϑ_j с большой *отрицательной* корреляцией $r_{ij} \approx \approx -1$ можно перейти к имитации *положительно*-коррелированной пары работ ϑ_i, $(\tau_j - \vartheta_j)$, где $\tau_j \gg t_{2j}$.)

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Абрамов, М. И. Маринничев, П. Д. Поляков. Сетевые методы планирования и управления. М., «Сов. радио», 1965.
2. R. M. van Slyke. Monte-Carlo methods and the PERT Problem. Oper. Res., 1963, v. 11, № 5.
3. Д. И. Голенко, Н. А. Левин, В. С. Михельсон, Ч. Г. Найдов-Железов. Автоматизация планирования и управления новыми разработками. Рига, «Звайгзне», 1966.
4. Г. Г. Сванидзе, З. А. Пиранашвили. К методу расчета регулирования речного стока с помощью системы водохранилищ. Сообщ. АН ГрузССР, 1963, т. 30, № 6.
5. З. А. Пиранашвили. Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования непрерывных случайных процессов. В сб. Вопросы исследования операций. Тбилиси, «Мецниереба», 1966.
6. Д. И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
4 VII 1967

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Л. П. ПАДАЛКО

(Минск)

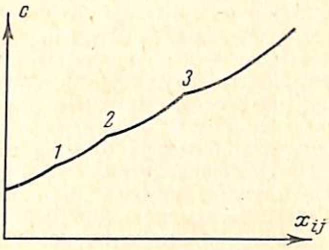
Рассматривается задача построения оптимальной транспортной сети, связывающей пункты производства и пункты потребления однородной продукции.

Предположим, что на пункты производства не наложены ограничения по объему

---

* Заметим в уточнение работы [3], что при малых r_{ij} величина $\rho_{ij} \approx 1{,}136r_{ij} \neq \neq r_{ij}$.

выпускаемой продукции и, кроме того, стоимости производства у всех источников одинаковы. Для потребителей задана величина спроса. Тогда задача формулируется следующим образом: требуется определить значения переменных x_{ij}, которые минимизируют функцию



$$F = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_{ij}) \quad (1)$$

при следующей структуре затрат:

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ f_{ij}(x_{ij}), & x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x_{ij} $(i \neq j)$ — величина грузопотока из i-го пункта в j-й. Отметим, что в сети возможны сквозные грузопотоки к потребителям через другие пункты потребления. Дополнительными условиями задачи являются односторонняя направленность грузопотока (если $x_{ij} > 0$, то $x_{ji} = 0$) и возможность истока только от поставщиков $\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 0,\ \text{если } j \text{ — поставщик}\right)$. Ограничения задачи таковы:

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = b_j, \quad (4)$$

где b_j — спрос j-го узла. Условие (4) — требование баланса грузопотоков в узлах сети. Функция $f_{ij}(x_{ij})$ является непрерывной и кусочно-выпуклой и имеет следующий вид:

$$f_{ij}(x_{ij}) = d_{ij}^{\nu} + b_{ij}^{\nu} x_{ij}^2, \quad (5)$$

где d_{ij} — затраты, не зависящие от объема перевозок, фиксированная доплата: b_{ij} — коэффициент пропорциональности: ν — интервал (ν-й) стандартного типоразмера оборудования. Причем $d_{ij} > 0$, $b_{ij} > 0$ и $d_{ij} / b_{ij} = \text{const}$ для всех коммуникаций при одном и том же ν.

Указанная функция показана на рисунке. Точки *1—3* соответствуют переходу от одного стандартного типоразмера оборудования к другому, причем каждый типоразмер используется в том интервале, где он является экономически наивыгоднейшим.

Сформулированная задача является дискретной [1] и многоэкстремальной [2]. Так как точных методов нахождения глобальных оптимумов таких задач не существует, то для их решения использовались различные приближенные подходы. Если функцию $f_{ij}(x_{ij})$ аппроксимировать линейной или же кусочно-линейной функцией, то можно использовать методы целочисленного линейного программирования [3]. Однако использование частично-целочисленного алгоритма Гомори [4] для задач значительных размеров данного типа оказалось неэффективным [5]. В работе [6] рассматривается приближенный метод, базирующийся на усовершенствовании метода Балинского. Этот метод предполагает линеаризацию функции.

Представляет интерес использование приближенных, специализированных методов, предназначенных для решения конкретных задач и базирующихся на эвристических соображениях. В таком случае задача может быть сформулирована в реальной постановке, без всяких упрощений. Ниже излагается один из таких подходов.

Строим на вершинах, представляющих собой пункты питания и производства, усложненную схему транспортной сети, соответствующую в общем случае полному графу. Найдем величины грузопотоков в такой сети при помощи итерационного приема [7], приближенно минимизирующего *

$$\sum_{i\neq j}^{m} \sum_{j\neq i}^{m} f_{ij}(x_{ij}). \quad (5')$$

Рассматривая полученное этим способом распределение грузопотоков, будем считать, что величина грузопотока на той или иной ветви сети характеризует сравни-

* Подчеркнем, что мы минимизируем на данном этапе (5′), а не (1), т. е. рассматриваем условную схему, в которой все технически допустимые линии предполагаются построенными.

тельную значимость, существенность этой ветви по сравнению с другими ветвями и, следовательно, целесообразность ее наличия в сети. Наличие той ветви, которая оказалась в некотором смысле слабо загруженной, считаем нецелесообразным и ее можно исключить из сети, сэкономив при этом на стоимости этой ветви и потерпев незначительный убыток в результате повышения эксплуатационных затрат *.

На основе изложенных выше соображений алгоритм построения оптимальной транспортной сети может быть представлен в виде многошагового процесса исключения ветвей. На каждом шаге производится исключение той ветви, которая дает максимальную экономию затрат. Процедура исключения прекращается, когда ни одну ветвь нельзя будет исключить или из условия связности графа сети, или из условия невозрастания затрат. Может оказаться целесообразным даже одновременное исключение нескольких ветвей из некоторого неполного графа.

В постановке задачи мы предполагали, что стоимости производства во всех пунктах потребления одинаковы. Если стоимости продукции будут разными, то это требование, по-видимому, можно учесть, если воспользоваться приемом, предложенным в [9]. Он заключается в преобразовании исходной транспортной сети к новому виду, при котором процесс производства отображается в виде перевозок на соответствующих дугах. В этом случае задача сводится к нахождению оптимального плана только перевозок в новой, расширенной сети.

Некоторая модификация данного метода позволяет также учесть ограничение по мощности у пунктов производства.

Описанный алгоритм был реализован в программе, составленной в Московском инженерно-экономическом институте им. С. Орджоникидзе для ЭЦВМ УРАЛ-4 и предназначенной для построения оптимальной конфигурации электрической сети.

Автор выражает благодарность Ю. Ю. Финкельштейну за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Корбут. Целочисленные задачи линейного программирования. В сб. Экономико-математические методы, вып. III. М., «Наука», 1965.
2. Д. Б. Юдин. Методы количественного анализа сложных систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 1.
3. И. Б. Моцкус. Метод целочисленно-линейного программирования некоторых задач оптимального проектирования. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1963, № 4.
4. R. Gomori. An algorithm for integer solutions to linear programs. Princeton IBM Mathem. Res. Projekt. Thechn. Rept., 1958, N 1.
5. В. Л. Леонас, И. Б. Моцкус. Метод последовательного поиска в оптимизации производственных систем и сетей. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1965, № 1.
6. А. А. Корбут, Н. А. Малинников. Приближенное решение некоторых неоднородных моделей размещения. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 3.
7. А. А. Глазунов. Электрические сети и системы. М., Госэнергоиздат, 1960.
8. Л. П. Падалко. О методе построения оптимальной конфигурации электрической сети с использованием ЭЦВМ. Изв. высш. учебн. завед. СССР, Энергетика, 1965, № 12.
9. В. И. Калика, В. А. Маш. Задачи оптимального размещения производства. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 3.

Поступила в редакцию
9 VII 1966

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОСНОВЕ МИНИМУМА ИЗДЕРЖЕК

Ф. Д. ФЕСЕНКО, Ю. Н. ШУЛЬГА

(Донецк)

При построении экономико-математической модели системы обслуживания одним из главных является вопрос правильного выбора критерия оценки оптимального режима ее работы.

---

* В статье [8] изложены инженерные, эвристические соображения о целесообразности использования такого приема применительно к электрической сети.

Весьма важными, на наш взгляд, критериями, характеризующими режим работы системы обслуживания, могут служить: 1) сумма общих издержек; 2 сумма удельных издержек.

Под суммой общих издержек будем понимать сумму издержек от простоя обслуживающих каналов и требований в очереди, исчисленную в единицу времени.

Под суммой удельных издержек будем понимать сумму, состоящую из издержек от простоя обслуживающих каналов, отнесенную к общему числу каналов системы, и издержек от простоя требований в очереди, отнесенных к среднему числу требований, одновременно находящихся в системе, исчисленную в единицу времени.

В настоящей статье рассматривается разомкнутая многоканальная система массового обслуживания [1, стр. 74—97], для которой функция суммы общих издержек имеет вид

$$Z_n(\alpha) = \overline{\nu}_n(\alpha) q_1 + \overline{\rho}_n(\alpha) q_2, \tag{1}$$

где $\overline{\nu}_n(\alpha)$ — средняя длина очереди; $\overline{\rho}_n(\alpha)$ — среднее число свободных каналов; n — общее число каналов; $\alpha = \lambda\bar{\tau}$ — коэффициент использования канала; λ — интенсивность входящего потока, τ — среднее время обслуживания одного требования; $\bar{q}_1$ — издержки от простоя требования в очереди; q_2 — издержки от простоя обслуживающего канала в единицу времени.

Функция суммы удельных издержек может быть записана в виде

$$V_n(\alpha) = \frac{\overline{\nu}_n(\alpha) q_1}{\overline{\nu}_n(\alpha) + \alpha} + \frac{\overline{\rho}_n(\alpha) q_2}{n}. \tag{2}$$

Оптимальное число каналов $n = n_0$, при котором $Z_n(\alpha)$ достигает минимума, определяется из уравнения

$$\overline{\nu}_n(\alpha) - \overline{\nu}_{n+1}(\alpha) - \frac{q_2}{q_1} = 0, \tag{3}$$

корнем которого является значение абсциссы $(\alpha_{n,\,n+1})$ точки пересечения графиков функций $Z_n(\alpha)$ и $Z_{n+1}(\alpha)$ (рис. 1). Для определения оптимального числа каналов, при котором функция $V_n(\alpha)$ достигает минимума, можно воспользоваться уравнением

$$n(n+1)\frac{\overline{\nu}_n(\alpha) - \overline{\nu}_{n+1}(\alpha)}{[\overline{\nu}_n(\alpha) + \alpha]\,[\overline{\nu}_{n+1}(\alpha) + \alpha]} - \frac{q_2}{q_1} = 0, \tag{4}$$

корнем которого является значение абсциссы $(\gamma_{n,\,n+1})$ точки пересечения графиков функций $V_n(\alpha)$ и $V_{n+1}(\alpha)$ (рис. 2). Здесь

$$\nu_n(\alpha) = \alpha^{n+1}\left[(n-1)!\,(n-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\alpha^k\right]^{-1}. \tag{5}$$

Пусть $\alpha = \alpha_0$ — коэффициент использования канала. Если $n = n_0$ — оптимальное число каналов, при котором функция $Z_n(\alpha)$ достигает минимума, то для α_0 должно выполняться условие $\alpha_0 \in (\alpha_{n_0-1,\,n_0}, \alpha_{n_0,\,n_0+1})$. Аналогично определяется оптимальное число каналов, при котором функция $V_n(\alpha)$ достигает минимума. Здесь должно выполняться условие $\alpha_0 \in (\gamma_{n_0-1,\,n_0}, \gamma_{n_0,\,n_0+1})$.

В качестве иллюстрации предложенного метода определения оптимального режима работы системы обслуживания при помощи нахождения минимума сумм общих и удельных издержек приведем решение задачи об определении количества причалов в порту с заданным грузооборотом.

Пусть годовой грузооборот порта определен в 1 100 000 *т* генеральных грузов; средняя загрузка судна 5000 *т*; навигационный период 365 суток; годовая стоимость содержания причала 260 000 руб.; средняя длительность обработки судна 5 суток. Необходимо определить, какое количество причалов должен иметь порт, чтобы обеспечить бесперебойную работу по погрузке и разгрузке судов при минимальных издержках (общих и удельных).

Рабочая гипотеза, которой мы будем следовать, состоит в том, что поток требований (судов) на обслуживание подчинен закону Пуассона, время обслуживания — показательное.

Определим параметр потока и среднее время обслуживания. Имеем

$$\lambda = \frac{1\,100\,000}{365\cdot 5000} \approx 0{,}6 \textit{ судов/сутки} \quad \tau = 5 \textit{ сутки/судно}.$$