ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 2, с. 129–140

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ МНОГООТРАСЛЕВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА ТРУДА

© 2016 г. А.П. Невечеря

(Краснодар)

В работе предложена математическая модель самоорганизации трудовых ресурсов. Модель основана на балансовых уравнениях относительно числа трудоустроенных специалистов в отраслях экономики и безработных специалистов, дифференцированных по признаку последнего места занятости. Математическая модель была преобразована к более удобному виду для численного анализа. Для построенной модели были поставлены задачи анализа динамики трудовых ресурсов и прогноза числа занятых и безработных. Были предложены методы оценки экзогенных величин модели. Полученные теоретические результаты были применены при решении поставленных задач. В рассмотренных примерах использовались реальные данные о числе занятых и безработных специалистов на рынке труда Российской Федерации за 2011–2013 гг., предоставляемые Федеральной службой государственной статистики. На основе данных за 2011 и 2012 г. был сделан прогноз объема трудовых ресурсов по отраслям на 2013 г. Произведено сравнение вычисленных данных со статистическими за 2013 г. Показано, что погрешность прогноза занятых специалистов по отраслям экономики Российской Федерации не превосходит 2%. На основании этого сделан вывод об адекватности предложенной модели.

Ключевые слова: рынок труда, самоорганизация, динамика трудовых ресурсов, прогноз, векторный вид модели.

Классификация JEL: C390.

ВВЕДЕНИЕ

Перемещение трудовых ресурсов на рынке труда РФ является объектом пристального внимания, в том числе со стороны государственных служб, о чем свидетельствует ежегодно обновляемая статистика занятых и безработных специалистов по отраслям (Федеральная служба государственной статистики, 2015). Использование этих данных позволяет проанализировать исследуемый рынок труда в целом или каждую отрасль в отдельности.

Подходы к анализу рынка труда можно разделить на два сегмента: статистические подходы и подходы, основанные на построении математических моделей.

Слабым местом многих статистических подходов оказывается их потребность в дополнительной или уточненной статистике. Так, например, в работе (Гимпельсон, Капелюшников, Рыжикова, 2012) на основе статистических данных вычисляются коэффициенты создания и ликвидации рабочих мест, что также является инструментом анализа рынка труда. Авторы отмечают, что из-за недостатка достоверных данных о случаях создания и ликвидации предприятий по регионам оцениваемые показатели могли получаться недостаточно точными.

При анализе статистических данных рынка труда также играет роль математическое моделирование процессов, происходящих на данном рынке (Бережная, Бережной, 2006). Наиболее распространены динамические модели и дискретные модели балансового типа. Недостаток этих моделей – в их слабой эффективности при решении задач прогнозирования. Так, в работах (Семенчин, Зайцева, 2007; Семенчин, Невечеря, 2014) вычисляются вероятности устройства и увольнения специалистов. При этом предложенная модель не позволяет определить характер межотраслевой динамики за продолжительный период времени, так как не содержит параметров, описывающих последнюю отрасль, где трудился работник. Этот изъян делает невозможным применение подобных моделей для решения задач прогнозирования.

В данной работе предложена математическая модель, с помощью которой на основе имеющихся статистических данных о числе занятых и безработных специалистов можно проводить анализ динамики межотраслевого перемещения трудовых ресурсов и прогнозировать изменения количественных характеристик рынка труда.

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим изменения на рынке труда, включающем n отраслей, в период времени $(t, t+1)$, где t – номер года. Рынок труда в момент t определяют следующие величины: $N_1^{(i)}(t)$ – число занятых в отрасли i; $N_2^{(i)}(t)$ – число безработных, последнее место работы которых было в отрасли i; $N_2^{(0)}(t)$ – число безработных, которые ранее не имели занятости на исследуемом рынке труда, $i = 1,..., n$; $\Delta N_2^{(0)}(t)$ – экзогенная величина, показывающая прирост трудоспособного населения в рассматриваемый период. По всем этим величинам имеется ежегодная статистика либо их можно по данной статистике оценить (Семенчин, Невечеря, 2014).

Запишем балансовые уравнения, связывающие введенные характеристики в моменты времени t и $t+1$:

$$N_1^{(i)}(t+1) = N_1^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{n} N_2^{(j)}(t) P_1^{(j,\,i)}(t) +$$

$$+(\Delta N_2^{(0)}(t) + N_2^{(0)}(t)) P_1^{(0,\,i)}(t) - N_1^{(i)}(t)(P_2^{(i)}(t) + P_3^{(i,\,n+1)}(t)),\ i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

$$N_2^{(i)}(t+1) = N_2^{(i)}(t) + N_1^{(i)}(t) P_2^{(i)}(t) - N_2^{(i)}(t) \sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(j,\,i)}(t),\ i = 1, \ldots, n; \tag{2}$$

$$N_2^{(0)}(t+1) = N_2^{(0)}(t) + \Delta N_2^{(0)}(t) - (\Delta N_2^{(0)}(t) + N_2^{(0)}(t)) \sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(j,\,i)}(t). \tag{3}$$

Здесь $P_1^{(j,i)}(t)$ – вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в отрасли j, найдет работу в отрасли i; $P_2^{(i)}(t)$ – вероятность того, что специалист, работающий в отрасли i, будет уволен; $P_1^{(0,i)}(t)$ – вероятность того, что безработный, не имевший занятости на исследуемом рынке труда с момента последнего появления на данном рынке, найдет работу в отрасли i; $P_1^{(i,n+1)}(t)$ – вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в отрасли i, покинет рынок труда; $P_1^{(0,n+1)}(t)$ – вероятность того, что безработный, ранее нигде незанятый на исследуемом рынке труда, покинет данный рынок; $P_3^{(i,n+1)}(t)$ – вероятность того, что специалист, работающий в момент времени t в отрасли i, покинет рынок труда.

Указанные вероятности должны удовлетворять следующим естественным условиям:

$$0 \le P_1^{(i,j)}(t) \le 1,\quad i = 0, \ldots, n;\quad j = 1, \ldots, n+1; \tag{4}$$

$$0 \le P_2^{(i)}(t) \le 1,\quad i = 1, \ldots, n; \tag{5}$$

$$0 \le P_3^{(i,\,n+1)}(t) \le 1,\quad i = 1, \ldots, n; \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(i,j)}(t) \le 1,\quad i = 0, \ldots, n. \tag{7}$$

Из условия (7) и левого неравенства в (4) следует правое неравенство в (4), поэтому вместо (4) будем использовать условие

$$P_1^{(i,j)}(t) \ge 0,\quad i = 0, \ldots, n;\quad j = 1, \ldots, n+1. \tag{8}$$

Равенства (1)–(3) вместе с условиями для вероятностей (5)–(8) будем называть *математической моделью самоорганизации трудовых ресурсов*. Под самоорганизацией трудовых ресурсов будем понимать способность отраслевого рынка труда как отдельного объекта менять свои свойства, выражающиеся в количественных характеристиках занятых и безработных на данном рынке труда, в зависимости от факторов внешней среды, выражающихся в экзогенных переменных предложенной модели.

Заметим, что из (1)–(3) следует

$$\sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{n} N_2^{(i)}(t) + \Delta N_2^{(0)}(t) - N_2^{(n+1)}(t+1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t+1) + \sum_{i=0}^{n} N_2^{(i)}(t+1). \tag{9}$$

Здесь $\sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t)$ – число работающих в момент t; $\sum_{i=0}^{n} N_2^{(i)}(t)$ – число безработных специалистов на исследуемом рынке труда в момент t; $\sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t+1)$, $\sum_{i=0}^{n} N_2^{(i)}(t+1)$ – аналогичные показатели в момент $t+1$; $\Delta N_2^{(0)}(t) - N_2^{(n+1)}(t+1)$ – разница между притоком трудоспособного населения и числом покинувших рынок труда за период времени (t, t + 1), которая характеризует общий прирост трудовых ресурсов на исследуемом рынке труда за данный промежуток времени; $N_2^{(n+1)}(t)$ – число работников, покинувших исследуемый рынок труда за рассматриваемый период, которое определяется по формуле

$$N_2^{(n+1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} N_1^{(i)}(t) P_3^{(i,\,n+1)}(t) + \sum_{i=1}^{n} N_2^{(i)}(t) P_1^{(i,\,n+1)}(t) + (\Delta N_2^{(0)}(t) + N_2^{(0)}(t)) P_1^{(0,\,n+1)}(t).$$

Левая часть равенства (9) равняется сумме количества трудовых ресурсов в момент t и общего прироста трудовых ресурсов на исследуемом рынке труда за период (t, t + 1), правая часть – количеству трудовых ресурсов в момент t + 1. Из этого следует, что в построенной математической модели соблюдается закон сохранения трудовых ресурсов.

Применение математической модели. Математическая модель (1)–(3), (5)–(8) позволяет по статистическим данным в моменты t и t + 1 получить значения вероятностей $P_1^{(i,j)}(t)$, $P_2^{(k)}(t)$, $P_3^{(l,\,n+1)}(t)$, $i = 0, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n+1$; k, $l = 1, \ldots, n$, что, в свою очередь, позволяет решить следующие задачи.

Задача анализа динамики трудовых ресурсов. Найденные вероятности позволяют анализировать динамику исследуемого рынка труда на промежутке времени (t, t + 1). Так, например, если для некоторой отрасли значения вероятностей и устройства на работу, и увольнения близки к единице, можно говорить о высокой текучести кадров в данной отрасли. Если вероятности устройства на работу близки к единице, а вероятность увольнения близка к нулю, можно говорить о развитии данной отрасли на исследуемом промежутке времени. Если же вероятности устройства на работу в конкретную область близка к нулю, а вероятность увольнения из этой отрасли близка к единице, можно говорить о быстром отмирании отрасли на исследуемом промежутке времени. Если вероятности устройства и увольнения на работу по конкретной отрасли близки к нулю, значит, отрасль не развивалась, но и не отмирала, и обновления кадров по отрасли практически не происходило, что можно рассматривать как негативный процесс.

Более точные заключения о состоянии той или иной отрасли можно сделать на основе конкретных значений вероятностей устройства и увольнения работников данной отрасли. Также можно составить полную картину динамики трудовых ресурсов: проследить внутреннее межотраслевое перемещение работников. Таким образом, возможна оценка текущих процессов на исследуемом рынке труда (пример такого анализа будет приведен в разд. 3).

Задача прогноза количества занятых и безработных на рынке труда. Предположив, что рассматриваемые вероятности в момент времени t + 1 равны соответствующим вероятностям в момент времени t (что справедливо, если основные тенденции рынка труда сохранились при переходе от промежутка времени $(t, t+1)$ к $(t+1, t+2)$), можно, зная $N_1^{(i)}(t+1), N_2^{(i)}(t+1), \Delta N_2^{(0)}(t+1), \; i=1,..., n$, с помощью равенств (1)–(3) получить значения величин $N_1^{(i)}(t+2), N_2^{(i)}(t+2), \Delta N_2^{(0)}(t+2)$, $i = 1,..., n$ (пример такого прогноза будет приведен в разд. 3).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ АНАЛИЗ

Преобразуем полученную математическую модель так, чтобы избавиться от неравенства (7), а условия на вероятности (5)–(6) не содержали ограничений сверху. Для этого введем дополнительные переменные.

Величину $P_1^{(i,n+2)}(t)$ определим следующим образом:

$$P_1^{(i,n+2)}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(i,j)}(t), \quad i = 0, \dots, n,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(i,j)}(t) + P_1^{(i,n+2)}(t) = 1, \quad i = 0, \dots, n. \tag{10}$$

В силу (7) и (8) значения $P_1^{(i,n+2)}(t)$, $i = 0, \dots, n$, удовлетворяют ограничениям $0 \le P_1^{(i,n+2)}(t) \le 1$, $i = 0, \dots, n$. Таким образом, величину $P_1^{(i,n+2)}(t)$ можно интерпретировать как вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в отрасли i, за период времени $(t, t + 1)$ останется безработным.

Условия (7) следуют из (10), и

$$P_1^{(i,n+2)}(t) \ge 0, \quad i = 0, \dots, n, \tag{11}$$

поэтому их можно заменить на условия (11) и равенства (10).

Определим величину $P_3^{(i,i)}(t)$: $P_3^{(i,j)}(t) = 1 - P_2^{(i)}(t) - P_3^{(i,n+1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, или

$$P_3^{(i,i)}(t) + P_2^{(i)}(t) + P_3^{(i,n+1)}(t) = 1, \quad i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Из условий (5), (6) следует, что $0 \le P_3^{(i,i)}(t) \le 1$, $i = 1, \dots, n$.

Величину $P_3^{(i,i)}(t)$ можно интерпретировать как вероятность того, что специалист, занятый в отрасли i в момент t, в момент времени $t + 1$ также будет занят в отрасли i.

Верхние ограничения в (5) и (6) следуют из нижних ограничений (5), (6), равенств (12) и условий

$$P_3^{(i,i)}(t) \ge 0, \; i = 1, \dots, n, \tag{13}$$

поэтому условия (5), (6) можно заменить на

$$P_2^{(i)}(t) \ge 1, \; i = 1, \dots, n. \tag{14}$$

$$P_3^{(i,n+1)}(t) \le 0, \; i = 1, \dots, n, \tag{15}$$

равенства (12) и условия (13).

В дальнейшем вместо математической модели, включающей равенства (1)–(3) и неравенства (5)–(8), будем рассматривать математическую модель (1)–(3), (8), (10)–(15).

Обозначим

$$P = (\tilde{P}, P_3^{(1,n+1)}(t) \dots, P_3^{(n,n+1)}(t), P_3^{(1,1)}(t), \dots, P_3^{(n,n)}(t))^T, \tag{16}$$

где $\tilde{P} = (P_1^{(0,1)}(t), \dots, P_1^{(0,n+2)}(t), \dots, P_1^{(n,1)}(t), \dots, P_1^{(n,n+2)}(t), P_2^{(1)}(t), \dots, P_2^{(n)}(t))^T$. Тогда преобразованную математическую модель можно записать в векторном виде:

$$N = AP, \tag{17}$$

$$P \geq 0, \tag{18}$$

где N – вектор

$$N = \Big(\tilde{N}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n+1}\Big)^T, \tag{19}$$

$$\tilde{N} = (\Delta_1^1, \ldots, \Delta_1^n, \Delta_2^1, \ldots, \Delta_2^n, \Delta_2^0)^T,$$

$$\Delta_1^i = N_1^{(i)}(t+1) - N_1^{(i)}(t),\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_2^i = N_2^{(i)}(t+1) - N_2^{(i)}(t),\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_2^0 = N_2^{(0)}(t+1) - N_2^{(0)}(t) - \Delta N_2^{(0)}(t).$$

Единицы, содержащиеся в векторе (19), это правые части равенств (10), (12).

Матрица A определяется видом N и P из равенств (1)–(3), (10), (12):

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{1,1} = (A_{1,1}^{(0)}\, A_{1,1}^{(1)} \ldots A_{1,1}^{(n)}),\ \ A_{1,1}^{(0)} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{'(0)} \\ A_{1,1}^{''(0)} \\ A_{1,1}^{'''(0)} \end{pmatrix},$$

$$A_{1,1}^{'(0)} = \begin{pmatrix} \sigma N^{(0)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma N^{(0)} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma N^{(0)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{– матрица размера } n \times (n+2),$$

$$A_{1,1}^{n(0)} = \theta_{n,(n+2)},$$

$$A_{1,1}^{'''(0)} = (-\sigma N^{(0)}\ -\sigma N^{(0)} \ldots -\sigma N^{(0)}\ -\sigma N^{(0)}\ 0),\ \ \ \sigma N^{(0)} = N_2^{(0)}(t) + \Delta N_2^{(0)}(t),$$

$$A_{1,1}^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{'(i)} \\ A_{1,1}^{''(i)} \\ A_{1,1}^{'''(i)} \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n;\ \ \ A_{1,1}^{'(i)} = \begin{pmatrix} N_2^{(1)}(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{(2)}(t) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & N_2^{(n)}(t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,1}^{''(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -N_2^{(i)}(t) & -N_2^{(i)}(t) & \ldots & -N_2^{(i)}(t) & -N_2^{(i)}(t) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{– матрица размера } n \times (n+2),$$

$$A_{1,1}^{'''(0)} = \theta_{1,(n+2)},\ \ A_{2,1} = (A_{2,1}^{(0)}\ \ A_{2,1}^{(1)}\ \ldots\ A_{2,1}^{(n)}),$$

$$A_{2,1}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

матрица размера $(n + 1) \times (n + 2)$ (единицы стоят на строке $i + 1$), $i = 0, ..., n$,

$$A_{3,1} = \theta_{n,(n+1)(n+2)}, \; A_{1,2} = \begin{pmatrix} A'_{1,2} \\ A''_{1,2} \\ A'''_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$A'_{1,2} = \begin{pmatrix} -N_1^{(1)}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -N_1^{(2)}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -N_1^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

$$A''_{1,2} = \begin{pmatrix} N_1^{(1)}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1^{(2)}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_1^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

$$A'''_{1,2} = \theta_{1,\,n}, \; A_{2,2} = \theta_{(n+1),\,n}, \; A_{3,2} = E_n,$$

$$A_{1,3} = \begin{pmatrix} A'_{1,3} \\ A''_{1,3} \end{pmatrix}, \; A'_{1,3} = A'_{1,2}, \; A''_{1,3} = \theta_{(n+1),\,n},$$

$$A_{2,3} = \theta_{(n+1),\,n}, \; A_{3,3} = E_n, \; A_{1,4} = \theta_{(2n+1),\,n}, \; A_{2,4} = \theta_{(n+1),\,n}, \; A_{3,4} = E_n.$$

Здесь $\theta_{l,k}$ – нулевая матрица с размерностью $l \times k$; E_n – квадратная единичная матрица с размерностью $n \times n$.

Для решения задач анализа и прогнозирования динамики трудовых ресурсов, рассмотренных в разд. 1, необходимо по статистическим данным, из которых состоит вектор N и матрица A, определить составляющие вероятности вектора P, т.е. необходимо отыскать вектор P, удовлетворяющий (17), (18).

Заметим, что система (17) содержит $4n + 2$ строк (n строк соответствуют равенствам (1), n + 1 строка – равенствам (2) и (3), $n + 1$ строка – условиям (10) и n строк приходится на условия (12)). Число неизвестных в системе (17), или, другими словами, размерность вектора P, равняется $(n + 2)(n + 1) + 3n = n^2 + 6n + 2 = m$. Таким образом, в системе (17) для любого натурального n число переменных, равное m, будет превосходить число строк данной системы, равное $4n + 2$. Поэтому система линейных алгебраических уравнений (17) является недоопределенной.

Можно показать, что матрица A имеет полный ранг (т.е. строки данной матрицы линейно независимы), решение задачи (17), (18) всегда существует, но не единственное. Тем самым мы показали, что задача (17), (18) является некорректной.

Согласно (Тихонов, Арсенин, 1979) ее нормальным решением будем называть вектор

$$P_0 = \lim_{\alpha \to 0} P_\alpha. \tag{20}$$

Здесь P_α доставляет на множестве M минимум функции $F_\alpha(P)$, где $M = \{P \in R^m, \ \ P_i \geq 0, i = 1,..., m\}$,

$$F_\alpha(P) = \| AP - N \|_1^2 + \alpha \| P \|_2^2, \ \alpha > 0, \tag{21}$$

$\| \bullet \|_1$ и $\| \bullet \|_2$ – евклидовы нормы в пространстве R^{4n+2} и R^m соответственно.

Таким образом, мы сформулировали задачу отыскания P, удовлетворяющего условиям (17), (18), и предложили способ нахождения нормального решения задачи (17), (18).

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

3.1. Задача анализа многоотраслевого рынка труда. При рассмотрении примеров будем использовать официальные статистические данные (Федеральная служба государственной статистики, 2015).

В соотношениях (1)–(3) многоотраслевой балансовой модели в качестве количественных характеристик используем данные по рынку труда, состоящему из 10 отраслей экономки РФ: 1) сельское и лесное хозяйства, охота, рыболовство и рыбоводство; 2) добыча полезных ископаемых; 3) обрабатывающие производства; 4) производство и распределение электроэнергии, газа и воды; 5) строительство; 6) оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования, гостиницы и рестораны; 7) транспорт и связь; 8) финансовая деятельность, операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг; 9) государственное управление и обеспечение военной безопасности, социальное обеспечение; 10) образование. Распределение работающих специалистов по отраслям в 2011–2013 гг. приведено в табл. 1.

Таблица 1. Численность занятого населения по видам экономической деятельности (тыс. человек) в 2011–2013 гг.

t	$N_1^{(1)}(t)$	$N_1^{(2)}(t)$	$N_1^{(3)}(t)$	$N_1^{(4)}(t)$	$N_1^{(5)}(t)$	$N_1^{(6)}(t)$	$N_1^{(7)}(t)$	$N_1^{(8)}(t)$	$N_1^{(9)}(t)$	$N_1^{(10)}(t)$
2011	5456,0	1417,1	10628,5	2267,4	5101,7	12754,2	6660,5	6164,5	5456,0	6518,8
2012	5222,8	1430,9	10731,8	2361,0	5294,4	13021,3	6725,3	6224,5	5365,9	6596,5
2013	4997,4	1570,6	10565,9	2284,5	5425,8	13100,3	6746,5	6425,2	5247,3	6532,3

Численность безработных за год t, последнее место занятости которых было в отрасли i, вычислим следующим образом:

$$N_2^{(i)}(t) = \frac{S_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} S_i(t)} N_2(t), \quad i = 1, ..., n,$$

где $N_2(t)$ – общее число безработных в год t; $S_i(t)$ – численность выбывших работников списочного состава в процентах от списочной численности работников в Российской Федерации по видам экономической деятельности в год t. Необходимые данные предоставляются Федеральной службой государственной статистики Российской Федерации. Вычисленные значения содержаться в табл. 2.

Число безработных на момент t, которые не были заняты каким-либо видом деятельности с момента последнего попадания на исследуемый 10-отраслевой рынок труда ($N_2^{(0)}(t)$), в 2011 г. равняется, примерно, 100 тыс. человек, в 2012 г. – 113 тыс. (Оценка данного параметра возможна за счет анализа числа выпускников и мигрантов, поступивших к этому периоду и ориентированных на представленные отрасли.) В течение 2011–2012 гг. на исследуемый рынок труда поступили (без учета распределения этих безработных между отраслями за данный промежуток

Таблица 2. Численность безработных, последнее место работы которых было в отрасли i (тыс. человек) в 2011–2013 гг.

t	$N_2^{(1)}(t)$	$N_2^{(2)}(t)$	$N_2^{(3)}(t)$	$N_2^{(4)}(t)$	$N_2^{(5)}(t)$	$N_2^{(6)}(t)$	$N_2^{(7)}(t)$	$N_2^{(8)}(t)$	$N_2^{(9)}(t)$	$N_2^{(10)}(t)$
2011	917,780	238,464	274,542	232,304	449,650	1067,371	265,742	520,046	160,149	174,228
2012	788,018	191,302	227,355	181,737	367,153	886,613	228,091	443,674	121,403	143,476
2013	843,988	205,156	219,758	180,333	378,918	841,068	213,187	443,167	126,306	162,080

времени) примерно 300 тыс. человек ($\Delta N_2^{(0)}(2011) = 300$). С учетом этого, согласно (9), с 2011 по 2012 г. рынок покинули порядка 471,9 тыс. человек.

Используя приведенные данные за 2011–2012 гг., найдено нормальное решение задачи (17), (18). По этим данным в табличном процессоре Microsoft Excel были построены вектор N и матрица A системы (17). С помощью надстройкой “Поиск решений” данного табличного процессора было получено решение задачи (17), (18) в виде вектора вероятностей P. Результат (вектор вероятностей P) приведен в табл. 3, 4.

В табл. 3 вероятность, находящаяся в ячейке, расположенной на пересечении строки, крайняя левая ячейка которой содержит число i, и столбца, крайняя верхняя ячейка которого содержит число j, соответствует $P_1^{(j,i)}$ – вероятности того, что безработный, последнее место работы которого было в отрасли j, найдет работу в i. Уход в отрасль 11 соответствует уходу из исследуемого 10-отраслевого рынка труда. В столбце 12 содержатся значения вероятностей того, что безработный специалист, последнее место работы которого было в отрасли i, останется безработным в 2012 г.

Таблица 3. Значения вероятностей устройства на работу специалистов за 2011–2012 гг.

$P_1^{(i,j)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,019	0,02	0,06	0,069	0,046	0,404	0,011	0,019	0	0,068	0,035	0,25
1	0,011	0,02	0,052	0	0,029	0,001	0,024	0,012	0	0,014	0,034	0,804
2	0,039	0,01	0,02	0,075	0,137	0,065	0,104	0,113	0,04	0,016	0,005	0,376
3	0,031	0,012	0,042	0,06	0,056	0,04	0,012	0,045	0,033	0,012	0,051	0,606
4	0	0,063	0,01	0,079	0,054	0,001	0,049	0,112	0,013	0,092	0,002	0,523
5	0,008	0,045	0,125	0,009	0,052	0,002	0,002	0,002	0,023	0	0,001	0,731
6	0,006	0,02	0,003	0,027	0,053	0	0,001	0,004	0	0,059	0	0,826
7	0,025	0	0,015	0,077	0,035	0,059	0,079	0,06	0,026	0,009	0,001	0,613
8	0,002	0,025	0,008	0,038	0,026	0,101	0,024	0,003	0	0,001	0,02	0,753
9	0,01	0,026	0,044	0,071	0,1	0,018	0,085	0,056	0,044	0,028	0	0,518
10	0,025	0,057	0,01	0,01	0,049	0,067	0,095	0,022	0,057	0,093	0,083	0,431

Таблица 4. Значения вероятностей увольнения работающего специалиста из отрасли i, вероятности его ухода из исследуемого рынка труда и продолжения работы в той же отрасли за 2011–2012 гг.

P	i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_2^{(i)}$	0,0092	0,0718	0,0058	0,0265	0,0076	0,0004	0,0098	0,0085	0,0071	0,0105
$P_3^{(ij)}$	0,9465	0,9279	0,994	0,9676	0,9921	0,9995	0,9901	0,9903	0,9732	0,9881
$P_3^{(i11)}$	0,0443	0,0003	0,0002	0,0059	0,0003	0	0,0002	0,0012	0,0198	0,0015

На основе вычисленных значений вероятностей (см. табл. 3, 4) проведем краткий анализ ситуации на исследуемом 10-отраслевом рынке труда за 2011–2012 гг.

Специалисты, которые с момента поступления на исследуемый рынок труда не имели занятости на данном рынке, с наибольшей вероятностью устраиваются в отрасль 6 ($P_1^{(0,6)} = 0{,}404 > P_1^{(0,j)}$, $j = 1,\dots, 10$, $j \neq 6$). Это говорит о том, что для прибывших на исследуемый рынок труда (в том числе и вновь прибывших) наибольшую привлекательность в 2011–2012 гг. представляла отрасль 6. Безработный специалист, ранее занятый в отрасли 1, с наибольшей вероятностью (0,804) в 2012 г. по-прежнему будет безработным.

Аналогично можно провести анализ вероятностей устройства на работу специалистов из других отраслей.

В табл. 4 приведены вероятности того, что занятые на рынке труда в 2011 г. специалисты продолжат работу в своей отрасли, либо уволятся, либо покинут рынок труда в 2012 г. Видно, что с наибольшей вероятностью работающие в 2011 г. специалисты в любой из исследуемых отраслей остаются так же занятыми в 2012 г.

Следующая задача, которую можно решить с помощью предложенной математической модели, задача прогнозирования. Будем предполагать, что вероятности увольнения и устройства на работу с 2012 по 2013 г. равны аналогичным вероятностям в 2011–2012 гг. Заметим, что экзогенную величину притока трудоспособных специалистов ($\Delta N_2^{(0)}(t)$) с 2012 по 2013 г. необходимо оценить, так как при прогнозировании данная величина не может быть известна.

3.2. Оценка экзогенных параметров модели при прогнозировании. При прогнозировании будем считать, что значения вероятностей устройства и увольнения специалистов за период времени $(t,\ t + 1)$ равны соответствующим значениям вероятностей устройства и увольнения специалистов за период времени $(t - 1,\ t)$. Параметр $\Delta N_2^{(0)}(t)$ определяется с помощью математического ожидания $M(\Delta N_2^{(0)}(t))$ за весь рассматриваемый период $T \in [0, t]$:

$$M(\Delta N_2^{(0)}(T)) = \sum_{T=0}^{t} \Delta N_2^{(0)}(T)/(t+1), \tag{22}$$

или, если оценивать только с периода t_1:

$$M(\Delta N_2^{(0)}(T)) = \sum_{T=t_1}^{t} \Delta N_2^{(0)}(T)/(t-t_1+1). \tag{23}$$

Если задан уровень значимости $\alpha \in (0, 1)$ тех данных, которые были получены позднее, тогда вместо формулы (23) можно воспользоваться формулой:

$$\alpha_{t_1+i} = 1-\alpha+\frac{2\alpha-1}{t-t_1}i, \quad i = 0, \dots, t-t_1,$$

$$M(\Delta N_2^{(0)}(T)) = \frac{1}{(t-t_1+1)/2}\sum_{T=t_1}^{t} \alpha_T \Delta N_2^{(0)}(T). \tag{24}$$

3.3. Пример прогнозирования динамики исследуемого рынка труда. На основе вычисленных в п. 3.1 значений вероятности устройства и увольнения специалистов за 2011–2012 гг. (см. табл. 3, 4) сделаем прогноз динамики трудовых ресурсов за 2012–2013 гг. и проверим достоверность этого прогноза, сравнивая полученные значения со статистическими данными.

Таблица 5. Прогнозные значения количества занятых и безработных (тыс. человек, по отраслям) на 2013 г., округленные до целых

N	i											$\sum_{i=0}^{n} N^{(i)}(t)$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$N_1^i(2013)$	–	4995	1427	10816	2434	5452	13311	6768	6265	5268	6657	63392
$N_2^i(2013)$	125	682	175	199	158	308	738	206	387	101	131	3208

Таблица 6. Статистические значения количества занятых и безработных в 2013 г. (тыс. человек, по отраслям), округленные до целых

N	i											$\sum_{i=0}^{n} N^{(i)}(t)$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$N_1^i(2013)$	–	4997	1571	10566	2285	5426	13100	6746	6425	5247	6532	62896
$N_2^i(2013)$	113	844	205	220	180	379	841	213	443	126	162	3727

Предположим, что все данные вероятности остались неизменными. Оценка величины $\Delta N_2^{(0)}(t)$ по формуле (23) дает 400 тыс. трудоспособных специалистов за период с 2012 по 2013 г. на рынке труда. Теперь вычислим число занятых и безработных специалистов к 2013 г. по формуле (17). Получим значения, сведенные в табл. 5. Статистические значения данных показателей приведены в табл. 6.

Средняя по отраслям величина абсолютной погрешности вычисленных значений числа работающих специалистов (dN_1) равняется 110,92 тыс. человек, а средняя относительная погрешность по данному показателю составляет 1,76%. Абсолютная погрешность числа работающих специалистов в 2013 г. (ΔN_1) равняется 496,38 тыс. человек, относительная погрешность составляет 0,79%. Средняя по отраслям величина абсолютной погрешности числа безработных (dN_2) равняется 49,35 тыс. человек, средняя относительная погрешность составляет 14,56%. Абсолютная погрешность числа безработных в 2013 г. (ΔN_2) равняется 518,84 тыс. человек, относительная погрешность составляет 13,92%.

Проанализируем полученные результаты. Средняя по отраслям относительная погрешность прогнозного числа занятых на исследуемом рынке труда за 2013 г. не превышает 2%, что указывает на эффективность предложенной модели. Средняя по отраслям относительная погрешность прогнозного числа безработных достигает 15%. Разница между относительной погрешностью прогноза числа занятых и относительной погрешностью прогноза числа безработных заметна. Тем не менее абсолютные погрешности данных прогнозных величин отличаются незначительно (соответственно 496,38 и 518,84 тыс. человек). Это исходит из уравнения баланса (9), согласно которому в предложенной модели всегда соблюдается баланс между занятыми, безработными, прибывшими и ушедшими из исследуемого рынка труда за определенный период времени, и из того, что занятых на рынке труда почти в 17 раз больше, чем безработных.

Таким образом, в приведенном примере достоверность прогноза по занятым и безработным получается не ниже 98 и 85% соответственно. Абсолютная погрешность общего объема вычисленных трудовых ресурсов на исследуемом рынке труда получилась примерно равной 23 тыс. человек, что по относительной величине составляет 0,03%. Таким образом, полученные результаты можно трактовать как удовлетворительный результат прогноза.

Ниже приведены расчеты того, как будет изменяться качество прогнозирования при других значениях параметра $\Delta N_2^{(0)}$ (табл. 7).

Подведем итог. В данной работе была предложена математическая модель, позволяющая на основе статистических данных о количестве работающих и безработных специалистов анализировать динамику трудовых ресурсов на рынке труда, а также прогнозировать число занятых и

Таблица 7. Погрешности прогноза на 2013 г. при разных значениях $\Delta N_2^{(0)}$ (2012)

$N_2^{(0)}$ (2012)	dN_1		dN_1		dN_2		dN_2	
	тыс. человек	%	тыс. человек	%	тыс. человек	%	тыс. человек	%
350	107,92	1,72	460,61	0,73	48,3	14,26	531,3	14,26
300	110,92	1,76	496,38	0,79	49,35	14,56	518,84	13,92
250	113,92	1,81	532,14	0,85	50,48	14,9	506,3	13,58

безработных. На основе результатов расчетов предложенной математической модели возможен полный анализ многоотраслевого рынка труда: можно проследить из какой отрасли в какую и какое число специалистов перешло за некоторый промежуток времени; какое число специалистов уволилось и сколько покинуло исследуемый рынок труда.

Расчеты показали, что предложенная математическая модель адекватна, так как относительная погрешность спрогнозированных значений составляет менее 2%. Для анализа безработных относительная погрешность несколько больше, что объясняется примерным равенством абсолютных погрешностей числа занятых и безработных, а также существенным преобладанием занятых на исследуемом рынке труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бережная Е.В., Бережной В.И. (2006). Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика.

Гимпельсон В.Е., Капелюшников Р.И., Рыжикова З.А. (2012). Движение рабочих мест в российской экономике: в поисках созидательного разрушения. Препринт. М.: Издательский дом Высшей школы экономики.

Семенчин Е.А., Зайцева И.В. (2007). Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики // *Экономика и математические методы*. Т. 43. Вып. 1. С. 133–136.

Семенчин Е.А., Невечеря А.П. (2014). Об обратной задаче в математической модели самоорганизации рынка труда // *Фундаментальные исследования*. № 6. С. 1184–1190.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. (1979). Методы решения некорректных задач. М.: Наука.

Федеральная служба государственной статистики (2015). Трудовые ресурсы. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/wages/labour_force, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июль 2015 г.).

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Berezhnaya E.V., Berezhnoy V.I. (2006). Mathematical Methods of Modeling Economic Systems. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).

Federal State Statistics Service (2015). Labor Force. Available at: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/wages/labour_force (accessed: July 2015, in Russian).

Gimpel'son V.E., Kapelyushnikov R.I., Ryzhikova Z.A. (2012). The Movement of Workplaces in the Russian Economy: in Search of Creative Destruction. Preprint. Moscow: Preprandially the house of the Higher school of Economics (in Russian).

Semenchin E.A., Nevecherya A.P. (2014). The Inverse Problem in the Mathematical Model of Self-Organization of the Labor Market. *Fundamental research* 6, 1184–1190.

Semenchin E.A., Zaytseva I.V. (2007). The Mathematical Model of Self-Organization of a Labor-Market for a Number of Branches of Economy. *Ekonomika i matematicheskie metody* 43, 1, 133–136 (in Russian).

Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. (1979). Methods for Solving Incorrectly Posed Problems. Moscow: Nauka (in Russian).

Поступила в редакцию
14.05.2015 г.

Analysis of Labor Force Dynamics in Intersectoral Mathematical Model of the Labor Market

A.P. Nevecherya

In the article was propossed mathematical model of self-organization of the labor force. This model is based on the balance equations for the number of employed and unemployed in different sectors of economy. The unemployed are divided by their last place of employment. The mathematical model was transformed to a more convenient form for numerical analysis. The tasks of analyzing the dynamics of the labor force and forecasting of the number of employed and unemployed were set for the model. Methods for estimation of the exogenous variables of the model were proposed.

The theoretical results were applied for solving the specific problems. In the above examples was used the real data of the number of employed and unemployed at the labor market of the Russian Federation for 2011–2013 years. The Federal State Statistics Service provides this information. The forecast of the labor force by the economy sectors for 2013 was made on the data for 2011 and 2012 years. The calculated data was compared with statistical data for the same 2013 year. It was shown that the error of the forecast of the number of employed by the economy sectors of the Russian Federation does not exceed 2%. We concluded that the proposed model is adequate.

Keywords: labor market, self-organization, dynamics of the labor force, forecast, vector presentation of the model.

JEL Classification: C390.