ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 2, с. 112–128

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД АГРЕГИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2016 г. М.И. Гребнев, Д.Н. Шульц

(Пермь)

Рассматривается проблема агрегирования производственных функций (ПФ), которая представляет собой частную задачу в рамках более широкого направления исследований, связанных с поиском теоретических и методологических мостов между микро- и макроэкономикой. Предыдущие исследования известных экономистов показали, что задача непротиворечивого агрегирования производственных функций не имеет удовлетворительного и общепризнанного решения. В статье показано, что непротиворечивое агрегирование ПФ возможно только в случае линейных ПФ. Предложен статистический метод агрегирования, после чего, основываясь на принципах байесовского оценивания и законе больших чисел, становится возможным оценить макроэкономическую ПФ. В предположении, что параметры ПФ отраслей экономики США распределены по нормальному закону, выведена макроэкономическая ПФ. Показано, что даже если все отраслевые ПФ являются ПФ Кобба–Дугласа, то макроэкономическая ПФ будет отлична от ПФ Кобба–Дугласа. Для российской экономики макроэкономическая ПФ сформирована на основе отраслевых и региональных ПФ Кобба–Дугласа. Показано, что в условиях ограниченности статистических данных более корректные оценки агрегированной ПФ по России могут быть получены на основе региональных ПФ.

Ключевые слова: производственная функция, непротиворечивое агрегирование, статистический метод.

Классификация JEL: C43, D24, E23.

ВВЕДЕНИЕ

Г.Б. Клейнер (Клейнер, 1986, с. 28–30) сформулировал проблему непротиворечивого описания микро- и макроуровней экономики, которая, как отмечает И.Г. Поспелов, остается нерешенной до сих пор (Поспелов, 2001, с. 9). Задача непротиворечивого описания экономики как иерархической системы может быть представлена в следующем виде.

Пусть имеется двухуровневая экономика, состоящая на микроуровне из n экономических агентов. Функционирование агента i описывается преобразовательным звеном f_i: $R \to R$. Вектор-функция f: $R^n \to R^n$ определяет вектор $y = (y_1,..., y_n)$ объемов выпуска всеми производственными единицами при затратах ресурсов $x = (x_1,..., x_n)$.

Далее мы будем опираться на упрощающее предположение, что между производственными единицами нет взаимосвязей.

На уровне экономики в целом взаимосвязь между агрегированными затратами ресурсов X и агрегированным выпуском Y описывается с помощью макроэкономической производственной функции (МаПФ) F: $R \to R$:

$$Y = F(X). \tag{1}$$

Между переменными x и X, y и Y также существуют взаимосвязи:

$$X = \chi(x), \tag{2}$$

$$Y = \phi(y), \tag{3}$$

где χ: $R^n \to R$ и ϕ: $R^n \to R$ – операторы агрегирования. В случае объемов выпуска и затраченных ресурсов операторы агрегирования могут быть просто операторами суммирования.

Естественно предполагать, что микро- и макроподходы должны изучать экономику как целостный объект и должны быть взглядами с разных сторон на единый предмет (Пороховский, 2002, с. 21). Соответственно, с точки зрения методологии экономической науки микро- и макроописание должны быть увязаны. Таким образом, условие непротиворечивости описания двухуровневой экономики требует, чтобы выполнялось соотношение

$$\phi(f(x)) = F(\chi(x)). \tag{4}$$

Как указывал Л. Кляйн (Klein, 1946a, p. 94), решение можно находить двумя способами.

Первый способ – искать макрофункцию F, удовлетворяющую условию (4). То есть на базе микроэкономической теории и статистических правил агрегирования надо выводить закономерности макроуровня, строить макроэкономическую теорию. Этот подход представляется очевидным, ниже мы его рассмотрим подробнее.

Второй способ (Klein, 1946a, p. 103) заключается в том, что необходимо сконструировать агрегаты (мосты), совместимые с микро- и макроописанием. Например, для производственных функций Кобба–Дугласа в качестве связующего индекса Л. Кляйн предложил использовать среднее геометрическое.

Следует заметить, что Л. Кляйн (Klein, 1946a) опирался на некоторые предположения:

1) существование функциональной связи между выпуском и затратами на макроуровне (ibid., p. 93);

2) фирмы максимизируют прибыль, а экономика является совершенно конкурентной, соответственно, выполняются условия равновесия производителя (равенство предельных продуктов факторов производство их реальным ценам) (ibid., p. 94).

Э. Фельс и Т. Тинтер (Фельс, Тинтер, 1971) предложили еще один подход. Даны операторы агрегирования и макротеория; необходимо найти соответствующую им микроэкономическую теорию. По данному пути развивалась экономическая теория во второй половине XX в., когда кейнсианская и новая классическая школа разрабатывали собственный микрофундамент для своих макроэкономических доктрин (Шульц, 2014b).

Существуют и альтернативные подходы к решению проблемы непротиворечивого описания. Например, известны призывы австрийской школы признать макроэкономику фикцией, не имеющей право на существование. По их мнению, реально возможны лишь микроэкономические домашние хозяйства и фирмы. Еще один возможный подход заключается в отказе от требования непротиворечивости микро- и макрозакономерностей на основе принципа дополнительности Н. Бора (Шульц, 2014a). Однако оба этих варианта остаются на обочине основных направлений экономической науки, поэтому мы сосредоточимся на способах решения задачи непротиворечивого описания.

Перечислим известные подходы к агрегированию производственных функций.

Одной из первых попыток вывести МаПФ из микроаналога предпринял Ф. Дреш (Dresch, 1938). Если выпуск микроэкономического агента i увеличивается на dy_i, то валовой выпуск вырастет на $dY = \sum_i p_i dy_i$, где p_i – цена продукта фирмы i. Тогда из решения дифференциального уравнения $dY/Y = \sum_i p_i dy_i / \sum_i p_i y_i$ в условиях общего экономического равновесия получаем формулу для агрегированной производственной функции:

$$Y(t) = Y(\tau)\exp\left[\int_\tau^t \left(\sum_i p_i dy_i / \sum_i p_i y_i\right)\right],$$

где t и τ – моменты времени для статистического индекса Дивизиа.

Заметим, что подход Л. Кляйна по поиску агрегирующих индексов не удовлетворяет свойствам индексов Дивизиа, общепринятых в статистике, о чем предупреждает Л. Кляйн (Klein, 1946, p. 96) и что привело к серьезным противоречиям между макроэкономическими показателями (Felipe, Fisher, 2003, p. 134).

Публикация Л. Кляйна (Klein, 1946a) породила серию статей в журнале “Econometrica” в 1946 г. Ш.Ш. Пу сформулировал основную проблему агрегирования производственных функций: необходимо найти функцию, в которой совокупный выпуск зависел бы только от совокупных затрат факторов производства, а не от их распределения между фирмами (Pu, 1946, p. 299). Более того, по его мнению, вторая предпосылка Л. Кляйна является необоснованной и избыточной. В том же номере журнала “Econometrica” была опубликована статья К. Мэя (May, 1946a, p. 297). Было показано, что вся схема вывода агрегатов Л. Кляйна меняется, если снимается условие совершенной конкуренции. То есть агрегирование производственных функций не может быть абстрактным, а должно опираться на конкретную экономическую теорию.

В своем ответе Ш.Ш. Пу и К. Мэю Л. Кляйн настаивал, что производственные функции – это уравнения, которые не зависят от микроэкономической структуры (Klein, 1946b, p. 303), что они отражают технологические процессы, а не процессы принятия решений (Klein, 1946b, p. 305). На что К. Мэй ответил, что производственные возможности страны в целом зависят не только от производственных возможностей фирм, но и от их распределения, которое определяется социально-экономическими отношениями (May, 1946b, p. 63).

В. Леонтьев (Leontief, 1947) сформулировал необходимое условие агрегируемости дважды дифференцируемой функции с неотрицательными аргументами – независимость предельной нормы замещения от остальных переменных: если задана ПФ $Y = f(k_1, ..., k_n, L)$, то агрегированная ПФ будет иметь вид $Y = F(K, L)$, где $K = \phi(k_1, ..., k_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial f/\partial k_i}{\partial f/\partial k_j}\right) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Иными словами, изменения в затратах труда и различных видов капитала не должны влиять на норму замещения между различными видами капитала, тогда их можно свернуть в единую переменную затрат капитала (Felipe, Fisher, 2003, p. 133).

Выводы В. Леонтьева были обобщены в условиях Натафа (Felipe, Fisher, 2003, p. 133): агрегированная ПФ существует только тогда, когда ПФ является аддитивно-сепарабельной, т.е. когда представима в виде $f(k, l) = \phi(k) + \psi(l)$.

Ф. Фишер (Felipe, Fisher, 2003) отметил, что условия Натафа очень жесткие. Опираясь на аргументы К. Мэя и интерпретируя производственную функцию как максимально возможный объем производства при заданных затратах ресурсов, он сформулировал собственные условия существования агрегированной ПФ – одинаковые для всех фирм пропорции выпуска продукции.

Х. Фелипе и Дж. Маккомби (Felipe, McCombie, 2013) доказали, что практическое использование ПФ Кобба–Дугласа на макроэкономическом уровне нельзя обосновать высоким качеством статистических оценок, поскольку она является приближением тождества доходов и расходов.

Г.Б. Клейнер ввел фундаментальное понятие “агрегированная экономическая технология”. Агрегированная экономическая технология производственного процесса f с показателями g, h – это отображение F подмножества $C \subset R_+^n$ в R^1, удовлетворяющее условию $g \circ F = f \circ h$, где g – система показателей производственных ресурсов, h – показатель объема производства продукции, “$\circ$” – коммутативная операция (Клейнер, 1986, с. 29). Как отмечает Г.Б. Клейнер, агрегированная экономическая технология – это идеальная модель производственного процесса, а производственная функция – грубое, приближенное описание (там же, с. 30).

В работах А.А. Петрова, И.Г. Поспелова и А.А. Шананина развитие получили модели агрегированного описания отрасли на основе распределения мощностей по технологиям (модель Хаутеккера–Йохансена) (Петров, Поспелов, Шананин, 1996).

Э.Б. Ершов (Ершов, 2013) сформулировал общее определение композитных производственных функций, исходящее из идеи оптимального использования технологий, каждая из которых определяется с помощью своей детерминированной производственной функции или границы производственных возможностей, а заданные ресурсы распределяются между технологиями так, чтобы был максимален суммарный показатель общего выпуска.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АГРЕГИРОВАНИЯ ПФ

Сформулируем задачу агрегирования ПФ. Заданы микроэкономические производственные функции f_i: $R \to R$ и правила агрегирования (2) и (3). На их основе необходимо вывести явную функцию (1) агрегированного выпуска Y, зависящую только от агрегированных затрат X и не зависящую от микроэкономических переменных.

Для линейных производственных функций $y_i = a_i x_i$ соотношение (4) принимает вид $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. Очевидно, что в общем случае линейной функции F, удовлетворяющей данным условиям, не существует. Только в частном случае $a_i = a$ МаПФ наследует функциональную форму микроэкономических ПФ (МиПФ) и может быть определена в явном виде $F(X) = aX$. Данное свойство не выполняется уже для случая степенной ПФ второго порядка (ПФ Аллена) $y_i = a_i + b_i x_i + c_i x_i^2$. Если предположить однородность параметров ПФ у всех экономических агентов $a_i = a$, $b_i = b$, $c_i = c$, то, чтобы существовала макроэкономическая функция F и выполнялось соотношение

$$an + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

необходимо предположить, что дисперсия $\sigma^2[x]$ постоянна и не зависит от масштабов использования ресурсов X. Тогда, приняв во внимание, что $\sigma^2[x] = M[x^2] - (M[x])^2$, получим выражение для МаПФ $F(X) = \tilde{a} + bX + cX^2/n$, где $\tilde{a} = an + cn\sigma^2[x]$.

Наконец, рассмотрим случай ПФ Кобба–Дугласа в условиях однородных параметров $y = ax_i^{\alpha}$. Очевидно, что не существует функциональной формы F для МаПФ, удовлетворяющей условиям $a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. Таким образом, в общем случае на макроэкономическом уровне не существует ПФ F, которая бы точно отражала функционирование микрообъектов.

Рассмотрим простой иллюстрирующий пример (Перский, Шульц, 2005). Пусть в экономике есть только 2 сектора, выпуск каждого задается производственной функцией Кобба–Дугласа $f_i = \sqrt{x_i}$, $i = 1, 2$. Для каждого уровня совокупных затрат X можно составить множество возможных выпусков (рис. 1а). При этом может возникнуть ситуация, когда увеличение затрат приводит к снижению выпуска (рис. 1б).

Таким образом, на примере задачи агрегирования производственных функций мы получили иллюстрации следующих утверждений. Во-первых, агрегированный результат зависит не только от объема затраченных ресурсов, но и от структуры их распределения. Любое изменение на макроуровне включает изменения совокупных затрат (экстенсивный рост) и структуры (интенсивный

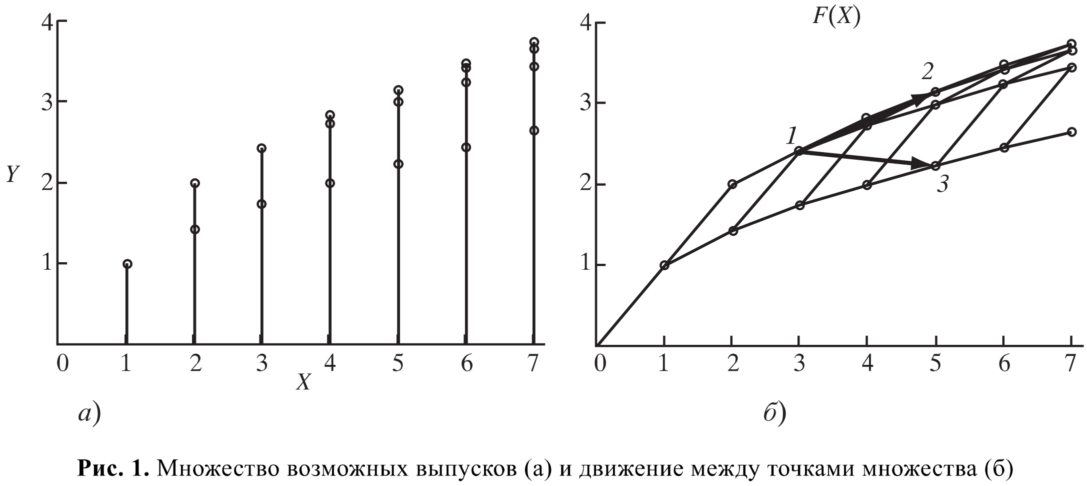

Рис. 1. Множество возможных выпусков (а) и движение между точками множества (б)

рост). Во-вторых, даже если микроэлементы функционируют оптимально, агрегированный выпуск не обязательно достигает своих потенциально возможных значений. Иными словами, эффективность на микроуровне не означает автоматически эффективности на макроуровне.

Графики на рис. 1б позволяют сделать еще несколько выводов, которые нужно принимать во внимание при эконометрическом моделировании. В явном виде не существует макроэкономической функции $F(X)$, но существует множество значений, которые может принимать выпуск Y при каждом уровне затрат X. Соответственно, трудно определить понятия предельного продукта $\partial F/\partial X$ для макроэкономических производственных функций. Исходя из сказанного, прирост агрегированного выпуска зависит не только от прироста наблюдаемых затрат X, но и от изменения ненаблюдаемой при макроэкономических исследованиях внутренней структуры. Поэтому вполне может возникнуть ситуация, когда эконометрические модели, оцененные в различных условиях, будут по-разному описывать влияние изменения затрат X на выпуск Y.

Мы рассмотрели ситуацию, когда у всех элементов системы были одинаковые производственные функции.

Теперь исследуем другие возможные сочетания производственных функций для экономики с двумя элементами (рис. 2). Инвариантной оказывается только линейная производственная функция и только в ситуации, когда параметры одинаковы для всех экономических агентов (ситуация 1). О функциональной зависимости на макроуровне не приходится говорить уже в случае линейных МиПФ с неоднородными параметрами (ситуация 2). Свойство инвариантности не выполняется для нелинейных ПФ даже в случае одинаковых параметров (ситуация 3). В более сложных и правдоподобных случаях: нелинейных ПФ с различными параметрами (ситуация 4) или вообще различных ПФ для разных элементов экономики (ситуация 5) – тем более невозможно говорить о существовании явной макроэкономической ПФ.

Таким образом, задача агрегирования функций допускает описание в статистическом смысле, а построенные паутинообразные диаграммы позволяют применить к макроэкономическим агрегатам понятие величины разброса.

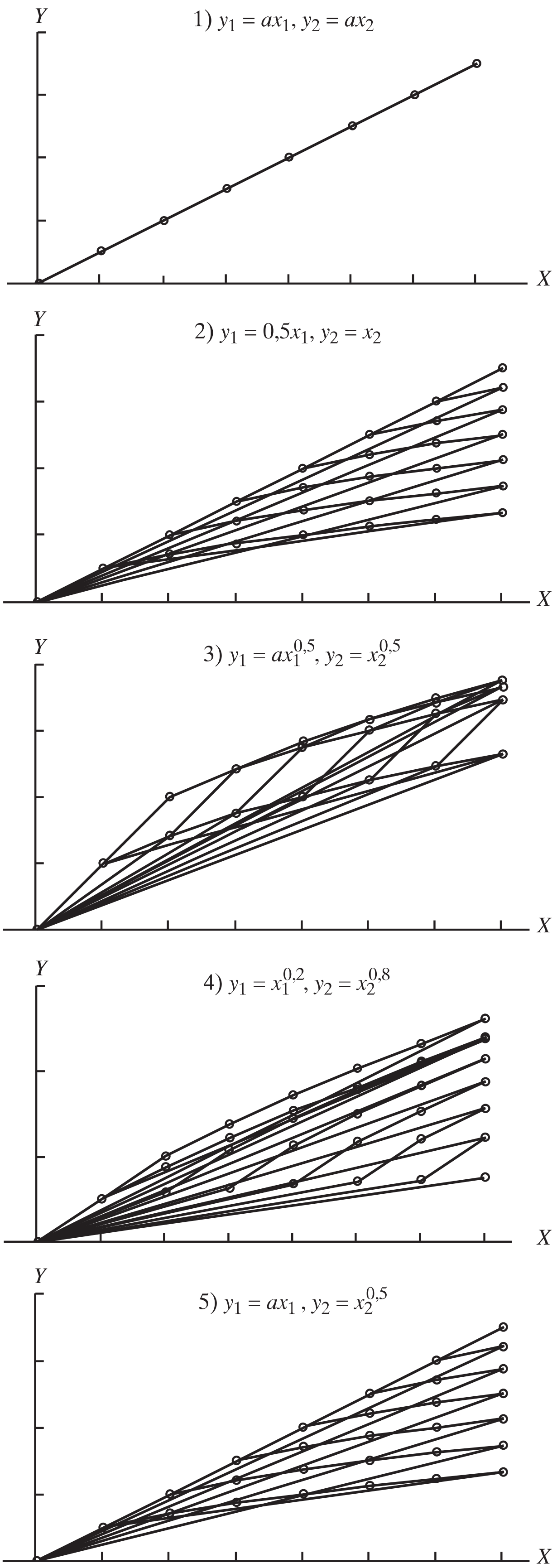

Рис. 2. Возможные значения совокупных выпусков (по оси OY) при различных значениях факторов (ось OX)

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД АГРЕГИРОВАНИЯ

В нашем исследовании предлагается статистический метод агрегирования производственных функций. Предположим, что экономическая система состоит из n элементов. Производственные функции каждого элемента i имеют одинаковую функциональную форму и различаются только параметром a_i: $f_i(x) = f(a_i, x)$.

Предположим, что параметры a_i являются независимыми (между элементами системы) и одинаково распределенными случайными величинами. То есть можно рассматривать a_i как реализацию случайной переменной A, которая имеет функцию распределения $G(a)$ и плотность распределения $g(a)$.

При условии, что случайные величины y_i имеют конечные первые и вторые моменты, выполняется закон больших чисел:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{p} M[y_1].$$

Тогда совокупный выпуск Y можно представить в виде

$$Y \xrightarrow{p} nM[y_1] = n\int f(a, x)g(a)da = n\tilde{F}(x). \tag{5}$$

Здесь через $\tilde{F}$ обозначена средняя функция по элементам системы.

Средняя функция – это типичный объем производства для каждого x, т.е. объем производства некой репрезентативной фирмы при затрате факторов x. Но в отличие от традиционного метода репрезентативного агента наш подход учитывает неоднородность экономических агентов через функцию распределения $g(a)$.

Выражение (5), по сути, является условным математическим ожиданием случайной функции $f(a, x)$ со случайным аргументом a. Таким образом, полученное выражение – это регрессионная форма модели $F(x) = M[Y|x] = nM[f(a, x)|x]$.

Замечание. Выражение (5) можно использовать для функций с экстенсивными (аддитивными) и интенсивными переменными. Например, рыночная цена (интенсивный показатель) – это единый фактор и для индивидуальных, и для рыночной функций спроса. В этом случае некая средняя функция спроса $\tilde{F}$ агрегируется в рыночную функцию на основе выражения (5).

В случае экстенсивных факторов, к которым относятся затраты труда и капитала, аргументом МаПФ оказывается уже не x_i, а $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Соответственно, в качестве оценки МаПФ можно взять выражение

$$Y = n\int f(a, x)g(a)da = n\int f(a, X/n)g(a)da = n\tilde{F}(X/n)$$

при условии, что средняя производственная функция $\tilde{F}$ является однородной первой степени (постоянной отдачи масштаба), т.е. если выполняется условие $\tilde{F}(\lambda x) = \lambda\tilde{F}(x)$, тогда $F(X) = \tilde{F}(X)$.

В примере, когда $f_i = \sqrt{x_i}$, $i = 1, 2$, при равномерном распределении ресурсов имеем $Y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{X/2} = \sqrt{2X}$, т.е. $\tilde{F}(X) = \sqrt{X}$, а $F(X) = 2\sqrt{X/2}$.

Рассмотрим случай двухфакторной ПФ Кобба–Дугласа $Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$, где Y – объем выпуска, K – стоимость капитала, L – затраты труда, A – параметр масштаба, α – эластичность выпуска по труду, β – эластичность выпуска по капиталу. Предположим, что параметры ПФ не коррелированы между собой. В этом случае МаПФ можно получить с помощью статистического метода

$$F(L, K) = n\iiint Ag_1(A)dA(L/n)^{\alpha}g_2(\alpha)d\alpha(K/n)^{\beta}g_3(\beta)d\beta,$$

где функции $g_1(A)$, $g_2(\alpha)$, $g_3(\beta)$ – функции плотности распределения для параметров отраслевых ПФ соответственно A, α, β.

Таблица 1. Оценки параметров отраслевых производственных функций (ОПФ) США

Отрасль	1949–1970			1980–1998			1949–1998		
	ln A	α	β	ln A	α	β	ln A	α	β
Пищевое производство	2,188	0,661	0,166	1,735	0,971	0,028	1,578	1,025	0,011
Текстильное производство	0,968	0,891	0,123	0,648	1,087	0,096	0,749	1,042	0,105
Швейное производство	1,459	0,731	0,043	1,628	0,505	0,580	1,635	0,675	0,244
Целлюлозно-бумажное производство	1,220	0,654	0,352	1,362	0,731	0,267	1,110	0,772	0,308
Издательская и полиграфическая деятельность	0,847	0,912	0,139	1,346	0,753	0,178	1,089	0,743	0,284
Химическое производство	1,362	0,560	0,389	2,154	0,380	0,418	1,220	0,785	0,239
Нефтепереработка	1,809	0,658	0,543	3,470	–0,223	0,631	1,759	0,437	0,714
Производство резиновых и пластмассовых изделий	1,411	0,708	0,162	0,872	1,050	0,060	1,230	0,886	0,145
Деревообработка и производство изделий из дерева	1,048	0,766	0,201	1,095	0,860	0,160	0,943	0,863	0,223
Производство мебели	1,040	0,935	–0,011	1,192	0,904	0,153	1,096	0,973	0,072
Производство строительных материалов	1,134	0,759	0,234	1,381	0,793	0,115	0,976	0,941	0,085
Производство металлов в первичных формах	1,299	0,726	0,244	1,668	0,743	0,174	0,930	0,978	0,121
Металлообработка	1,217	0,840	0,159	1,554	0,710	0,234	1,193	0,847	0,176
Производство промышленного оборудования и вычислительной техники	1,150	0,730	0,253	0,191	1,069	0,138	0,847	0,932	0,124
Производство электронного и оптического оборудования	1,258	0,680	0,255	1,470	0,706	0,215	1,002	0,838	0,190
Производство транспортного оборудования	1,487	0,713	0,183	–0,440	1,323	0,046	0,988	0,969	0,096
Производство инструментов	1,143	0,784	0,156	0,992	0,950	0,028	0,871	0,979	0,034
Прочие обрабатывающие производства	1,227	0,816	0,259	1,332	0,848	0,106	0,935	1,055	0,054
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,895	0,650	0,485	2,949	–0,366	0,829	1,117	1,044	0,124

Так как первый множитель в выражении для МаПФ является математическим ожиданием случайной величины A, то

$$F(L, K) = nM[A]\iint (L/n)^{\alpha} g_2(\alpha)d\alpha(K/n)^{\beta} g_3(\beta)d\beta. \tag{6}$$

После вычислений и преобразований получаем

$$F(L, K) = nM[A](L/n)^{M[\alpha]+0,5\sigma^2[\alpha]\ln(L/n)}(K/n)^{M[\beta]+0,5\sigma^2[\beta]\ln(K/n)}, \tag{7}$$

или в логарифмической форме

$$\ln Y = \ln(nM[A]) + M([\alpha]\ln(L/n) + 0,5\sigma^2[\alpha]\ln^2(L/n) +$$
$$+ M[\beta]\ln(K/n) + 0,5\sigma^2[\beta]\ln^2(K/n). \tag{8}$$

Таким образом, мы синтезировали МаПФ на основе предположения о функциональной форме ОПФ и о нормальном распределении параметров α и β. Очевидно, что такая МаПФ будет иметь вид ПФ Кобба–Дугласа только в случае $\sigma^2[\alpha] = \sigma^2[\beta] = 0$. То есть в случае абсолютной однородности элементов экономики $\alpha_i = \alpha$ и $\beta_i = \beta$ МаПФ принимает вид

$$F(L, K) = nM[A]\left(\frac{L}{n}\right)^{\alpha}\left(\frac{K}{n}\right)^{\beta}.$$

И если ПФ однородная первой степени $\alpha + \beta = 1$, мы получаем традиционную ПФ Кобба–Дугласа. В общем же случае МаПФ будет иметь функциональную форму, отличную от ПФ Кобба–Дугласа, за счет квадратичных членов, отражающих неоднородность экономических агентов.

АГРЕГИРОВАНИЕ ПФ ДЛЯ ЭКОНОМИКИ США

Мы провели оценку параметров производственной функции Кобба–Дугласа[1] для отраслей промышленности США для 1949–1970 гг., 1980–1998 и для 1949–1998 гг. с помощью регрессионной модели

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K, \tag{9}$$

где все переменные выражены в млрд долл.

Оценки модели (9) по 19 отраслям экономики США методом наименьших квадратов приведены в табл. 1.

Далее мы будем использовать данные 1980–1998 гг. На этом периоде $M[\alpha] = 0,726$, $M[\beta] = 0,235$, $\sigma^2[\alpha] = 0,175$, $\sigma^2[\beta] = 0,050$; а $M[A] = 4,056$.

Приведем оценки параметров линеаризованного уравнения

$$\ln Y = a + a_1 \ln\frac{L}{n} + a_2 \ln^2\frac{L}{n} + b_1 \ln\frac{K}{n} + b_2 \ln^2\frac{K}{n} \tag{10}$$

различными способами (табл. 2).

Таблица 2. Оценки параметров МаПФ

Параметр	Оценка путем подстановки в уравнение (8)	Анализ мультиколлинеарности (стабильности коэффициентов)				
a	4,345	4,723	5,126	7,274	7,321	5,967
a_1	0,726	**0,478**	**0,585**	–0,960	–0,995	–
a_2	0,088	–	–	**0,214**	0,219	**0,082**
b_1	0,235	**0,369**	–0,145	**0,311**	0,322	–
b_2	0,025	–	**0,082**	–	–0,002	**0,055**

Примечание. В таблице полужирным шрифтом выделены статистически значимые коэффициенты на уровне 95%.

Дадим пояснения к таблице. На основе выражения (8) простой подстановкой в него статистических характеристик случайных величин A, α и β можно вывести оценки параметров МаПФ. Например, $a = \ln(nM[A])$, $a_1 = M[\alpha]$ и т.д. Таким образом, заполняется первый столбец. Оценка параметров уравнения (10) методом наименьших квадратов наталкивается на проблему значительной коррелированности факторов, входящих в МаПФ.

Проанализируем свойства полученной ПФ. Предельная производительность полученной МаПФ по капиталу равна

$$F'_K = (P(L)/K)(K/n)^{M[\beta]+0,5\sigma^2[\beta]\ln(K/n)}(M[\beta]+\sigma^2[\beta]\ln(K/n)),$$

где $P(L) = nM[A](L/n)^{M[\alpha]+0,5\sigma^2[\alpha]\ln(L/n)}$.

[1] См. материалы сайта Бюро трудовой статистики (http://www. bls. gov/).

Таким образом, $F'_K \geq 0$ при условии $M[\beta] + \sigma^2[\beta]\ln(K/n) \geq 0$. Это означает, что если $\ln(\frac{K}{n}) \geq -M[\beta]/(\sigma^2[\beta]) = -4{,}7$, то запас основных фондов K превышает 0,173 млрд долл., что составляет менее 0,035% уровня 1997 г.

Аналогично можно определить условия выполнения $F'_L \geq 0$. Необходимо, чтобы $M[\alpha] + \sigma^2[\alpha]\ln(L/n) \geq 0$, т.е. когда в производстве используются трудовые ресурсы на 0,30 млрд долл.

Свойство ПФ $F''_{KK} \leq 0$ имеет место при условии

$$(\sigma^2[\beta]\ln(K/n) + M[\beta])(\sigma^2[\beta]\ln(K/n) + M[\beta] - 1) + \sigma^2[\beta] \leq 0,$$

или $-3{,}64 \leq \ln(K/n) \leq 14{,}24$. Иными словами, закон убывающей предельной отдачи на уровне экономики США соблюдается при затратах капитала от 0,5 млрд долл. до 29 047 трлн долл., т.е. практически всегда.

Аналогично затраты трудовых ресурсов должны находиться от 1,099 до 25 трлн долл. Это означает, что интервал значений L, при которых выполняется закон убывающей предельной отдачи, значительно уже, чем аналогичный интервал у K. Фактические затраты трудовых ресурсов в конце 1990-х годов практически совпадают с нижней границей интервала.

АГРЕГИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПФ

С помощью статистического метода агрегирования М. Гребнев (Гребнев, 2013) синтезировал различные виды МаПФ для производственных функций Кобба–Дугласа – $f(l, k) = Al^{\alpha}k^{\beta}$; CES – $f(l, k) = A(\delta l^{-p} + (1 - \delta)k^{-p})^{-m/p}$ и Леонтьева – $f(l, k) = A\min\{al, bk\}$.

Здесь необходимо сделать уточнение. В примере для США использовался нормальный закон распределения. Его недостатком является ненулевая вероятность, что параметры производственных функций примут отрицательные или, наоборот, очень высокие положительные значения. Поэтому в примере М. Гребнева помимо нормального распределения рассматриваются:

– равномерное

$$g(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

– треугольное

$$g(x) = \begin{cases} 0. & x < a; \\ 2(x-a)/[(b-a)(c-a)], & a \leq x < c \\ 2/(b-a), & x = c; \\ 2(b-x)/[(b-a)(b-c)], & c < x \leq b; \\ 0, & b < x; \end{cases}$$

– логнормальное

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\{-(\ln x - \mu_x)^2/(2\sigma_x^2)\}.$$

Так, для ПФ Кобба–Дугласа общий вид агрегированной производственной функции имеет вид (7). Укажем вид МаПФ для различных функций распределения параметров.

1. *Равномерное распределение* ($\alpha \sim R[a, b]$, $\beta \sim R[c, d]$):

$$F(L, K) = nM[A]\left(\frac{(L/n)^a - (L/n)^b}{\ln(L/n)(a-b)}\right)\left(\frac{(K/n)^c - (K/n)^d}{\ln(K/n)(c-d)}\right),$$

где a и b – минимальное и максимальное значение параметра α; c и d – минимальное и максимальное значение параметра β.

2. *Треугольное распределение* ($\alpha \sim Tr[a, b, m_\alpha]$, $\beta \sim Tr[c, d, m_\beta]$):

$$F(L, K) = nM[A]\left(\frac{2(m_\alpha - a)(L/n)^b + 2(b - m_\alpha)(L/n)^a - 2(b-a)(L/n)^{m_\alpha}}{\ln^2(L/n)(b-a)(m_\alpha - a)(b - m_\alpha)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{2(m_\beta - c)(K/n)^d + 2(d - m_\beta)(K/n)^c - 2(d-c)(K/n)^{m_\beta}}{\ln^2(K/n)(d-c)(m_\beta - c)(d - m_\beta)}\right).$$

3. *Нормальное распределение* ($\alpha \sim N(M[\alpha], \sigma^2[\alpha])$, $\beta \sim N(M[\beta], \sigma^2[\beta])$) – выражение (7).

4. *Логнормальное распределение* ($\ln(\alpha) \sim N(\mu_\alpha, \sigma^2_\alpha)$, $\ln(\beta) \sim N(\mu_\beta, \sigma^2_\beta)$):

$$F(L, K) = nM[A]\int (L/n)^\alpha \frac{e^{-(\ln\alpha - \mu_\alpha)^2/(2\sigma^2_\alpha)}}{\alpha\sqrt{2\pi}\,\sigma_\alpha}d\alpha \int (K/n)^\beta \frac{e^{-(\ln\beta - \mu_\beta)^2/(2\sigma^2_\beta)}}{\beta\sqrt{2\pi}\,\sigma_\beta}d\beta.$$

Это выражение не может быть вычислено в аналитическом виде.

Формулы показывают, что функциональная форма МаПФ отличается от функциональной формы МиПФ Кобба–Дугласа при равномерном, треугольном и нормальном законах распределения параметров, а при логнормальном законе распределения параметров МаПФ в явном виде не существует. Таким образом, свойство инвариантности ПФ на микро- и макроэкономических уровнях не выполняется.

5. *ПФ Леонтьева*:

$$F(L, K) = 0{,}5nM[A](M[a]L/n + M[b]K/n) -$$
$$- 0{,}5nM[A]\iint (|aL/n - bK/n|)g_2(a)g_3(b)dadb.$$

При этом для всех рассматриваемых законов распределения будет выполняться

$$F(L, K) \le nM[A]\min\{M[a](L/n),\ M[b](K/n)\}.$$

Знак равенства в этой формуле будет, если функция ($aL/n - bK/n$) не меняет знака в области интегрирования. На основании этого можно сделать вывод о том, что в случае ПФ Леонтьева функциональная форма МаПФ не будет отличаться от функциональной формы МиПФ только в частном случае.

6. *ПФ с постоянной эластичностью замены*: общий вид МаПФ не удалось вывести в явном виде ни для одной из функций распределения, т.е. если МиПФ имеет вид CES, МаПФ в явном виде не существует.

АГРЕГИРОВАНИЕ ПФ ДЛЯ ЭКОНОМИКИ РОССИИ

По аналогии с моделью США, описанной выше, может быть выведена МаПФ для экономики России.

В качестве МиПФ в российских условиях исследователи (Бессонов, 2002, с. 50) рекомендуют использовать ПФ, в которой капитал заменен на инвестиции в основной капитал

$$Y = AL^\alpha I^\beta, \tag{11}$$

где Y – валовая добавленная стоимость по видам экономической деятельности, в млрд руб. в ценах 2004 г.; I – инвестиции в основной капитал, в млрд руб. в ценах 2004 г.; L – среднегодовая численность занятых, в тысячах человек.

Оценки[2] параметров этой ПФ по 15 отраслям (видам экономической деятельности) российской экономики приведены в табл. 3.

[2] Оценивание проводилось на линеаризованной модели методом наименьших квадратов инструментом Prognoz Platform 7. 2 (www. prognoz. ru) на периоде с 2004 по 2011 г.

Таблица 3. Оценки параметров отраслевых производственных функций для РФ

Вид экономической деятельности	ln(A)	α	β
Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство	6,02	0,00	0,13
Рыболовство, рыбоводство	3,90	0,00	0,10
Добыча полезных ископаемых	7,22	0,45	0,00
Обрабатывающие производства	3,70	0,62	0,43
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	6,43	0,00	0,00
Строительство	3,14	1,49	0,28
Оптовая и розничная торговля	–0,99	3,64	0,07
Гостиницы и рестораны	4,24	1,17	0,24
Транспорт и связь	0,48	3,18	0,25
Финансовая деятельность	6,74	2,57	0,00
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	0,28	2,23	0,56
Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование	5,81	0,50	0,06
Образование	3,59	1,20	0,06
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	5,78	0,00	0,09
Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг	4,41	1,35	0,00

Таблица 4. Результаты критерия Колмогорова–Смирнова

Закон распределения	Параметр α		Параметр β	
	Статистика критерия ($K - S$)	$K - S$, *p-value*	Статистика критерия ($K - S$)	$K - S$, *p-value*
Нормальный	0,16	0,77	0,22	0,38
Треугольный	0,27	0,20	0,36	0,03
Логнормальный	0,32	0,10	0,39	0,02
Равномерный	0,39	0,01	0,42	0,01

Для определения статистического распределения был использован критерий согласия Смирнова–Колмогорова (табл. 4). На основании данного критерия можно сделать вывод о том, что среди рассмотренных теоретических функций распределения для параметров α и β наиболее подходящей является функция нормального распределения.

Таким образом, МаПФ для России будет иметь вид (7) с поправкой, что вместо капитала K используется показатель инвестиций в основной капитал I. Факторы этого уравнения сильно коррелированы (коэффициент корреляции факторов – от 0,95 до 1). Соответственно, оценки МНК оказываются нестабильными, принимают неадекватные значения как по знакам, так и по абсолютной величине (табл. 5).

Для решения проблемы мультиколлинеарности были построены оценки на основе ридж-регрессии (гребневого МНК). Были выбраны оценки ридж-регрессии с коэффициентом смещения $\lambda = 0{,}1$. Агрегированная ПФ России имеет вид

$$F(L, I) = 1258{,}91(L/15)^{0{,}441+0{,}135\ln(L/15)}(I/15)^{0{,}216+0{,}019\ln(I/15)}.$$

Статистически более надежные результаты можно получить на основе региональной статистики. Тогда вместо видов экономической деятельности необходимо оценить параметры

Таблица 5. Результаты оценивания уравнения (7) при различных наборах факторов

$\ln(nM[A])$	37,44	10,22	–4,30
$M[\alpha]$	–40,15	–2,90	17,13
$0{,}5\sigma^2[\alpha]$	12,33	–	–6,63
$M[\beta]$	1,15	0,83	0,62
$0{,}5\sigma^2[\beta]$	–0,05	–0,02	–

Таблица 6. Вероятности не отвергнуть гипотезу о виде распределения

Закон распределения	Характеристика	
	K – S, *p-value*	*AD*, *p-value*
$g_n(\alpha) \in LogN(\mu_\alpha, \sigma_\alpha)$	0,64	0,85
$g_n(\beta) \in N(M[\beta], \sigma[\beta])$	0,78	0,82

уравнения (11) для регионов. В качестве Y выбран показатель ВРП региона в млн руб.; в качестве L – фонд оплаты труда в млн руб. Все переменные приведены к ценам 1998 г.

Использование региональных данных позволяет серьезно увеличить число наблюдений. Например, в связи с переходом с ОКОНХ на ОКВЭД статистика для оценки параметров отраслевых ПФ доступна лишь для 8 периодов (с 2004 по 2011 г.), а при работе с региональными данными можно использовать статистику 15 периодов (с 1998 по 2012 г.). Для оценки функции распределения также увеличивается число наблюдений – вместо 15 видов деятельности 83 субъекта РФ.

Результаты оценивания параметров линеаризованной ПФ Кобба–Дугласа по регионам РФ приведены в табл. 8. Оценивание проводилось в ПО Prognoz Platform 7.2 на периоде с 1998 по 2012 г.

В отличие от случая оценок по отраслям оценки по регионам имеют более выраженный характер распределения: логнормальный – для параметра α, нормальный – для параметра β (рис. 3). Гипотезы о виде распределения были проверены по критериям Колмогорова–Смирнова и Андерсона–Дарлинга (табл. 6).

Заметим, что логнормальное распределение хорошо описывает особенности некоторых регионов, имеющих высокие эластичности по труду, т.е. Ненецкого автономного округа, Ханты-Мансийского автономного округа, Чукотского автономного округа, Сахалинской области, Кабардино-Балкарской Республики.

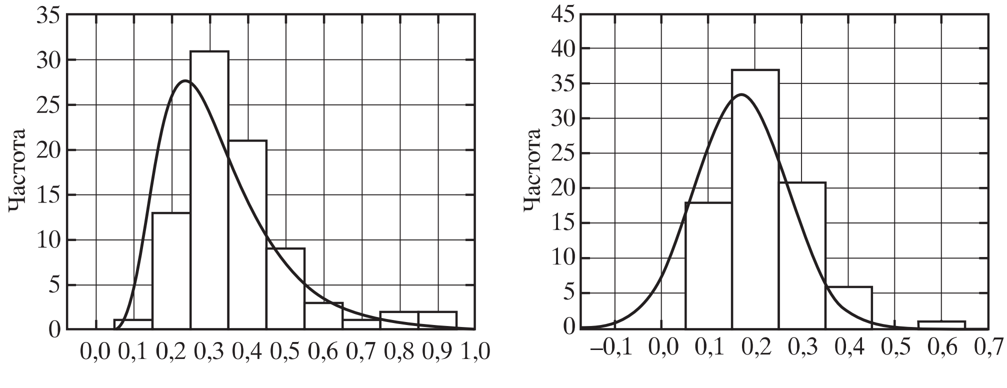

Рис. 3. Эмпирическое распределение параметров, оцененных по регионам РФ

Таким образом, агрегированная ПФ рассчитывается по формуле

$$F(L, I) = nM[A]\int_0^{\infty}(L/n)^{\alpha}\ \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\alpha}}\exp\{-(\ln(\alpha)-\mu_{\alpha})^2/(2\sigma_{\alpha}^2)d\alpha(I/n)\}^{M[\beta]+0,5\sigma^2[\beta]\ln(I/n)}. \quad (12)$$

Важно отметить, что интеграл в выражении (12) является неберущимся. Поэтому оценки всех параметров, кроме $M[A]$, вычисляются на основе значений параметров региональных ПФ (см. табл. 6). Параметр $M[A]$ как некий балансирующий коэффициент масштаба был оценен с помощью метода наименьших квадратов уравнения МаПФ. Положительной стороной такого подхода к оцениванию является то, что мы не сталкиваемся с проблемой мультиколлинеарности факторов.

Полученные оценки приведены в табл. 7. Графически агрегированная ПФ России имеет вид, представленный на рис. 4.

Таблица 7. Оценки параметров МаПФ РФ

Параметр	Значение
n	83
$M[A]$	211,3
μ_{α}	–1,23
σ_{α}	0,46
$M[\beta]$	0,17
$\sigma[\beta]$	0,10

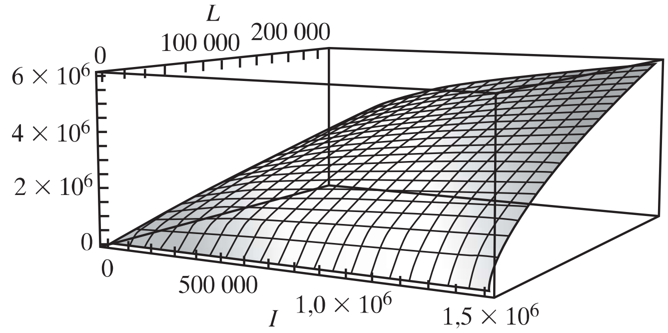

Рис. 4. Агрегированная ПФ России

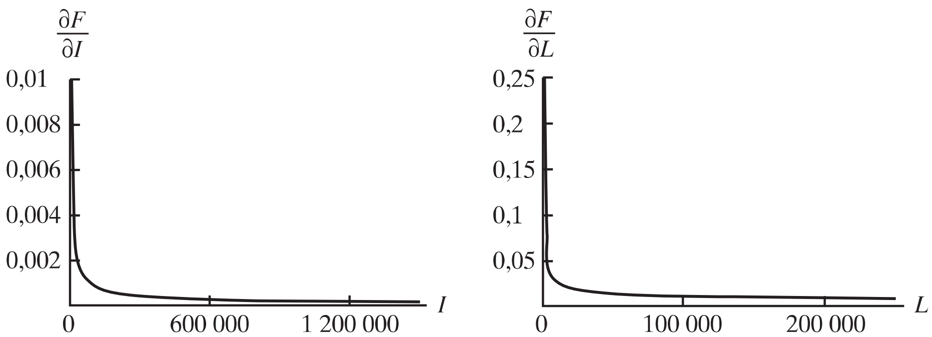

Рис. 5. Графики предельной производительности I и L

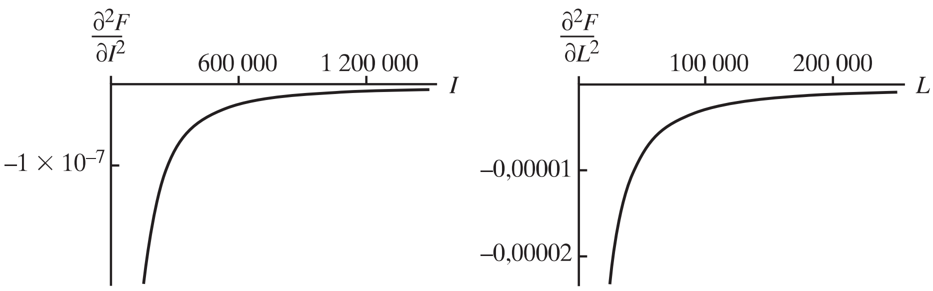

Рис. 6. Графики вторых производных I и L

Проанализируем свойства МаПФ РФ. Предельные производительности труда и инвестиций положительны и убывают (рис. 5), а вторые производные – отрицательны (рис. 6). Предельная норма замещения для выведенной МаПФ составляет 15,39. То есть в условиях дефицита кадров, снижения численности населения в трудоспособном возрасте и других негативных тенденций

Таблица 8. Оценки коэффициентов ПФ Кобба–Дугласа по регионам РФ

Субъект РФ	ln(*A*)	α	β	α + β
Белгородская область	5,21	0,45	0,22	0,67
Брянская область	6,46	0,27	0,18	0,45
Владимирская область	6,82	0,24	0,18	0,42
Воронежская область	7,04	0,22	0,20	0,41
Ивановская область	7,05	0,25	0,09	0,35
Калужская область	5,53	0,31	0,24	0,56
Костромская область	6,42	0,36	0,09	0,45
Курская область	5,84	0,38	0,20	0,58
Липецкая область	6,97	0,30	0,12	0,42
Московская область	6,32	0,38	0,21	0,59
Орловская область	6,47	0,33	0,12	0,45
Рязанская область	6,82	0,24	0,17	0,41
Смоленская область	5,25	0,39	0,26	0,65
Тамбовская область	6,88	0,20	0,18	0,38
Тверская область	6,65	0,45	0,05	0,49
Тульская область	6,20	0,34	0,17	0,52
Ярославская область	6,14	0,43	0,14	0,57
г. Москва	4,00	0,26	0,59	0,85
Республика Карелия	7,03	0,17	0,18	0,35
Республика Коми	7,70	0,25	0,11	0,36
Архангельская область	5,64	0,56	0,10	0,67
Ненецкий АО	5,62	0,91	0,02	0,93
Вологодская область	8,11	0,15	0,13	0,29
Калининградская область	5,56	0,44	0,14	0,58
Ленинградская область	4,77	0,49	0,25	0,74
Мурманская область	9,39	0,11	–	0,11
Новгородская область	6,68	0,29	0,12	0,41
Псковская область	6,82	0,16	0,17	0,33
г. Санкт-Петербург	5,94	0,49	0,18	0,66
Республика Адыгея	4,82	0,38	0,24	0,62
Республика Калмыкия	5,41	0,11	0,24	0,36
Краснодарский край	6,56	0,34	0,20	0,53
Астраханская область	5,62	0,30	0,25	0,55
Волгоградская область	7,36	0,19	0,20	0,39
Ростовская область	5,39	0,38	0,29	0,67
Республика Дагестан	4,74	0,42	0,28	0,69
Республика Ингушетия	5,47	0,24	0,12	0,36
Кабардино-Балкарская Республика	5,61	0,61	0,02	0,63
Карачаево-Черкесская Республика	5,63	0,46	0,07	0,53
Республика Северная Осетия–Алания	5,82	0,27	0,20	0,47
Чеченская Республика	4,23	0,36	0,33	0,70
Ставропольский край	6,24	0,39	0,18	0,58
Республика Башкортостан	6,13	0,55	0,09	0,64
Республика Марий Эл	6,31	0,14	0,24	0,38
Республика Мордовия	5,52	0,25	0,30	0,55
Республика Татарстан	6,22	0,29	0,30	0,59
Удмуртская Республика	7,05	0,31	0,11	0,42
Чувашская Республика	6,49	0,12	0,28	0,40
Пермский край	5,51	0,35	0,32	0,67
Кировская область	8,23	0,13	0,09	0,22
Нижегородская область	7,27	0,32	0,15	0,47
Оренбургская область	6,21	0,29	0,25	0,54
Пензенская область	6,53	0,22	0,20	0,42
Самарская область	7,76	0,19	0,22	0,41
Саратовская область	5,95	0,24	0,32	0,56
Ульяновская область	7,15	0,24	0,15	0,38

Таблица 8. Окончание

Субъект РФ	ln(A)	α	β	$\alpha + \beta$
Курганская область	6,64	0,24	0,17	0,41
Свердловская область	6,26	0,27	0,32	0,59
Тюменская область	6,65	0,57	0,06	0,63
Ханты-Мансийский АО	7,09	0,73	–	0,73
Ямало-Ненецкий АО	8,87	0,26	0,10	0,36
Челябинская область	5,91	0,21	0,37	0,58
Республика Алтай	5,75	0,19	0,17	0,37
Республика Бурятия	6,83	0,30	0,11	0,41
Республика Тыва	6,48	0,20	0,06	0,26
Республика Хакасия	7,44	0,29	–	0,29
Алтайский край	6,36	0,24	0,26	0,50
Забайкальский край	6,12	0,32	0,19	0,51
Красноярский край	7,61	0,32	0,13	0,45
Иркутская область	6,41	0,40	0,18	0,58
Кемеровская область	7,86	0,25	0,12	0,37
Новосибирская область	6,86	0,26	0,23	0,49
Омская область	6,24	0,27	0,27	0,55
Томская область	7,17	0,46	–	0,46
Республика Саха (Якутия)	7,63	0,26	0,11	0,38
Камчатский край	7,93	0,15	0,06	0,22
Приморский край	7,59	0,22	0,15	0,37
Хабаровский край	7,44	0,24	0,16	0,40
Амурская область	7,26	0,22	0,13	0,35
Магаданская область	8,38	0,09	–	0,07
Сахалинская область	3,98	0,86	0,02	0,89
Еврейская АО	5,26	0,31	0,14	0,45
Чукотский АО	3,82	0,71	0,14	0,86

на рынке труда для компенсации снижения фонда оплаты труда на 1 млн руб. в ценах 1998 г. необходимы дополнительные инвестиции в основной капитал в размере 15 млн руб. (в ценах 1998 г.).

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Исследована проблема агрегирования производственных функций и показано, что в общем случае невозможен непротиворечивый синтез макроэкономических функциональных зависимостей на основе их микроэкономических аналогов.

2. Предложен статистический метод агрегирования производственных функций и синтезированы новые виды агрегированных ПФ на основе ПФ Кобба–Дугласа, постоянной эластичности замены CES, Леонтьева и различных статистических функций распределения (нормальное, равномерное, треугольное, логнормальное).

3. В частности показано, что если отраслевые ПФ имеют вид Кобба–Дугласа, а их параметры распределены по нормальному закону, то агрегированная ПФ будет содержать дополнительные (относительно ПФ Кобба–Дугласа) члены, отражающие неоднородность отраслевой структуры.

4. Исследованы свойства агрегированных производственных функций и установлено, что в общем случае производственные функции не являются инвариантными на различных уровнях экономической иерархии, что можно рассматривать как проявление эмерджентности экономических систем.

5. Показано, что экономика США на периоде 1980–1999 гг. может быть описана с помощью отраслевых ПФ Кобба–Дугласа, параметры которой распределены по нормальному закону.

6. Установлено, что синтез агрегированной ПФ для экономики России корректнее проводить не на основе отраслевых, а на основе региональных ПФ Кобба–Дугласа. Эластичности выпуска по труду распределены по логнормальному, а по капиталу – по нормальному закону распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бессонов В.А., Цухло С.В. (2002). Анализ экономической динамики российской переходной экономики. М.: Институт экономики переходного периода.

Гребнев М.И. (2013). Построение агрегированной производственной функции для экономики России // *European Social Science Journal*. Т. 1. № 12. С. 438–445.

Ершов Э.Б. (2013). Композитные производственные функции // *Экономический журнал ВШЭ*. Т. 17. № 1. С. 108–129.

Клейнер Г.Б. (1986). Производственные функции: Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика.

Коэн А., Харкурт Дж. (2009). Судьба двух Кембриджей о теории капитала // *Вопросы экономики.* № 8. С. 4–27.

Перский Ю.К., Шульц Д.Н. (2005). Государственное регулирование экономики как иерархической системы // *Журнал экономической теории.* № 2. С. 25–46.

Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. (1996). Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат.

Пороховский А.А. (2002). Вектор экономического развития. М.: ТЕИС.

Поспелов И.Г. (2001). Экономические агенты и системы балансов. Препринт WP2/2001/03. М.: ГУ ВШЭ.

Фельс Э., Тинтер Г. (1971). Методы экономических исследований. М.: Прогресс.

Шульц Д.Н. (2014а). Микроэкономическое фундирование макроэкономики и принцип дополнительности Бора // *Вестник Института экономики РАН*. № 2. С.157–165.

Шульц Д.Н. (2014б). Проблематика иерархического анализа в основных направлениях экономической теории XX в. // *Журнал экономической теории*. № 2. С.130–138.

Dresch F.W. (1938). Index Numbers and the General Economic Equilibrium // *Bulletin of the American Mathematical Society*. Vol. 44. P.134–141.

Felipe J., Fisher F.M. (2003). Aggregation in Production Functions: What Applied Economists Should Know // *Metroeconomica*. Vol. 54. No. 3. P. 208–262.

Felipe J., McCombie J.S.L. (2013). The Aggregate Production Function and the Measurement of Technical Change: “Not Even Wrong”. Cheltenham: Edward Elgar.

Klein L.R. (1946a). Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior // *Econometrica*. Vol. 14. No. 2. P. 93–108.

Klein L.R. (1946b). Remarks on the Theory of Aggregation // *Econometrica*. Vol. 14. No. 4. P. 303–312.

Leontief W.W. (1947). Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships // *Econometrica*. Vol. 15(4). P. 361–373.

May K. (1946a). The Aggregation Problem for a One-Industry Model // *Econometrica*. Vol. 14. № 4. P. 285–298.

May K. (1946b). Technological Change and Aggregation // *Econometrica*. Vol. 15. No. 1. P. 51–63.

Pu S.S. (1946). A Note on Macroeconomics // *Econometrica*. Vol. 14. No. 4. P. 299–302.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Bessonov V.A., Tsukhlo S.V. (2002). The Analysis of Russian Transition Economy Dynamics. Moscow: Institute for Transition Economy (in Russian).

Dresch F.W. (1938). Index Numbers and the General Economic Equilibrium. *Bulletin of the American Mathematical Society* 44, 134–141.

Ershov E.B. (2013). Composite Production Functions. *The HSE Economic Journal* 17, 1, 108–129 (in Russian).

Felipe J., Fisher F.M. (2003). Aggregation in Production Functions: What Applied Economists Should Know. *Metroeconomica* 54, 3, 208–262.

Felipe J., McCombie J.S.L. (2013). The Aggregate Production Function and the Measurement of Technical Change: “Not Even Wrong”. Cheltenham: Edward Elgar.

Fel’s E., Tinter G. (1971). Methods of Economic Research. Moscow: Progress (in Russian).

Grebnev M.I. (2013). Construction Aggregate Production Function for the Economy of Russia. *European Social Science Journal* 1, 12, 438–445 (in Russian).

Klein L.R. (1946a). Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior. *Econometrica* 14, 2, 93–108.

Klein L.R. (1946b). Remarks on the Theory of Aggregation. *Econometrica* 14, 4, 303–312.

Kleyner G.B. (1986). Production Functions: Theory, Methods, Applications. Moscow: Finance and Statistics (in Russian).

Koen A., Kharkurt Dzh. (2009). Whatever Happened to the Cambridge Capital Theory Controversies? *Voprosy Economiki* 8, 4–27 (in Russian).

Leontief W.W. (1947). Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships. *Econometrica* 15(4), 361–373.

May K. (1946a). The Aggregation Problem for a One-Industry Model. *Econometrica* 14, 4, 285–298.

May K. (1946b). Technological Change and Aggregation. *Econometrica* 15, 1, 51–63.

Perskij Yu.K., Shultz D.N. (2005). Government Regulation of Economy as Hierarchical System. *Journal of Economic Theory* 2, 25–46 (in Russian).

Petrov A.A., Pospelov I.G., Shananin A.A. (1996). The Experience in Mathematical Modeling of Economy. Moscow: Energoatomizdat (in Russian).

Porokhovskiy A.A. (2002). The Vector of Economic Development. Moscow: TEIS (in Russian).

Pospelov I.G. (2001). Economic Agents and Systems of Balances. Preprint WP2/2001/03. Moscow: National Research University Higher School of Economics (in Russian).

Pu S.S. (1946). A Note on Macroeconomics. *Econometrica* 14, 4, 299–302.

Shul’ts D.N. (2014a). Microeconomic Funding of Macroeconomics and the Bohr’s Principle of the Complementarity. *Vestnik Instituta ekonomiki Rossijskoj akademii nauk* 2, 157–165 (in Russian).

Shul’ts D.N. (2014б). Hierarchical Analysis of Economy in Economics Mainstream of the 20th Century. *Journal of Economic Theory*. № 2. C.130–138 (in Russian).

Поступила в редакцию
06.02.2015 г.

Statistical Method of Production Functions Aggregation

M.I. Grebnev, D.N. Shults

The article discusses the aggregation of production functions (PF). It is shown that consistent aggregation of PF is possible only in very special cases. A statistical aggregation method is suggested. It allows to synthesize new kinds of macroeconomic PF. Macroeconomic PF for the US economy based on industrial Cobb–Douglas PF with a normal distribution parameters is constructed and investigated. For the Russian economy the aggregate PF obtained on the basis of sectoral and regional Cobb–Douglas PF. It is shown that in case of scarcity of statistical data the more correct estimations of the aggregate PF for Russia may be derived using regional PF.

Keywords: production function, consistent aggregation, statistical approach.

JEL Classification: C43; D24; E23.