ОТРАСЛЕВЫЕ ПРОБЛЕМЫ

СВОЙСТВА ЛИНЕЕК ССУДО-СБЕРЕГАТЕЛЬНЫХ ПЛАНОВ*

© 2016 г. Д.Г. Ильинский

(Москва)

В статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014а) был предложен подход для изучения перехода от ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования к более передовым институтам. А именно рассматривались линейки, т.е. наборы тарифных планов, осуществлявшие плавный переход от субсидируемой ипотеки к коммерческой. Были введены следующие свойства линеек: справедливость, сплошность, правильность, локальная правильность, эффективность. В настоящей статье для широкого класса линеек исследуются связи между данными свойствами. Найдены формулы для выигрышей участников программы от использования данной линейки. Доказано, что линейка правильная тогда и только тогда, когда она локально правильная. Кроме того, показано, что для каждой эффективной линейки существует справедливая эффективная линейка с теми же наборами выигрышей у участников. Получено достаточное условие сплошности эффективной линейки. Результаты позволяют существенно упростить отыскание эффективных (Парето-оптимальных) линеек.

Ключевые слова: ипотека, линейка ссудо-сберегательных программ.

Классификация JEL: D02, D14, G21.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как показывают исследования (Полтерович, Старков, 2007, 2010, 2011), для широкой массы населения в условиях неразвитой культуры сберегательных и кредитных историй целесообразно введение ссудо-сберегательных программ (ССП). В 2011 г. такая программа была внедрена в Краснодарском крае. На сегодняшний момент аналогичная программа действует в Ростовской области и Башкортостане. Пока наибольшего успеха достигла программа в Башкортостане (начало – апрель 2014 г., к настоящему моменту около 7000 участников (С начала года Сбербанк..., 2015)). В Ростове с начала 2015 г. выдано 2000 кредитов (За февраль в Донском регионе..., 2015). В Ханты-Мансийском АО открытие вкладов по данной программе, как и по другим жилищным субсидиям, временно приостановлено (Накопительная ипотека, 2015). В Калуге Закон об ипотеке был принят в марте 2014 г. и планируется начать программу с 1 января 2016 г. (Обзор жилищных программ..., 2015).

ССП имеют следующие отличия перед другими ипотечными программами. Прежде всего это связанность планов накопления и кредитования. Потребителю нужно обосновать свою способность выплачивать кредит, для этого он обязан регулярно вносить взносы в течение нескольких лет. В случае систематических пропусков потребитель исключается из программы. Таким образом, ненадежные заемщики выявляются на стадии накопления и не получают кредит. Надежные заемщики получают в конце накопления государственные субсидии и возможность взять кредит в объеме недостающих средств для получения квартиры. За счет субсидий получается выдавать кредиты под низкие проценты. Это второе отличие ССП от других ипотечных программ.

ССП позволяет всем участникам процесса – потребителю, государству и банку – получать выгоду от программы. Правильно сформированные ссудо-сберегательные программы выдают кредиты главным образом за счет средств самих вкладчиков; при этом по сравнению с индивидуальным

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 14-02-00234а).

накоплением приобретение квартиры осуществляется значительно быстрее. Бюджетная премия позволяет вкладчикам получать достаточно высокий эффективный процент и дает возможность банку, несмотря на заниженную кредитную ставку, поддерживать достаточно высокую маржу, обеспечивая прибыльность бизнеса.

Несмотря на обилие работ по ссудо-сберегательным программам, относительно мало исследований посвящено модели ССП. При этом, как правило, предполагается, что параметры накопления и кредитования не меняются со временем и анализируются соответствующие стационарные режимы (Laux, 2005; Schlueter et al., 2015). Статической является и модель, разработанная в монографии (Полтерович, Старков, 2007). Динамический подход используется редко, и при этом жизнь участника ограничивается одним–тремя периодами (Scholten, 2000; Plaut P., Plaut S., 2004). Исключением является статья (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014б), в которой была введена динамическая модель ССП.

ССП служат промежуточным институтом для перехода к более передовым формам ипотечного кредитования. В частности, наличие кредитных историй у участников ССП позволит в будущем брать коммерческие кредиты по более выгодным процентам. Таким образом, со временем ССП станет невыгодна для потребителя и банка, однако неясно, как именно осуществляется переход от ССП к другим ипотечным институтам.

В статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014а) был предложен подход для исследования данного перехода. Основным способом задания ССП является тарифный план (ТП), т.е. набор основных параметров программы. Для данного ТП определяются полезности или выигрыши участников системы, т.е. издержки государства, прибыль банка и полезность потребителя от использования ТП. В статье вводится понятие *линейки* как конечного набора ТП с разными сроками накопления, описаны полезные свойства линеек и выигрыши участников. Кроме того, предложена линейка (набор ТП) со сроком накопления от 1 до 6 лет. При этом крайние ТП соответствовали реальным параметрам ССП в Краснодарском крае (на 5 и 6 лет) и коммерческому кредиту (на 1 год). Промежуточные ТП были подобраны с набором необходимых условий: допустимости и выгодности для потребителя, банка и государства, монотонного изменения параметров, Парето-эффективности (неулучшаемости) для каждого агента.

В чем состоят преимущества линейки тарифных планов по сравнению с системой ТП, включающих только два крайних плана? Во-первых, линейка осуществляет плавный переход от ССП к коммерческим кредитам. Действительно, по мере роста благостостояния, потребители будут использовать тарифные планы с бóльшим взносом и меньшим сроком накопления для более быстрого получения квартиры. Соответственно, они будут получать меньше субсидий государства и отдавать больше средств банку. Таким образом, мы имеем второе улучшение: данная система при правильно подобранных параметрах будет полезна всем участникам процесса: потребителю, банку и государству. Однако априори не ясно, что такие параметры существуют. В данной работе будет продолжено исследование линеек тарифных планов в общем виде.

Основные определения. В первую очередь нам необходимо определить линейку и описать ее полезные свойства, а также понять, как эти свойства зависят от параметров модели (разд. 2–6).

Тарифный план – это набор параметров, задающий ССП для потребителя. При некоторых естественных ограничениях на модель (разд. 2) ТП задается пятью параметрами: сроками накопления τ и кредитования $\tau_{кр}$, ставками по депозиту p и кредиту c, а также величиной премии на сбережения в процентах s.

Под *линейкой* будем подразумевать конечный набор тарифных планов с разными сроками накопления. При этом мы накладываем некоторые разумные ограничения на параметры ТП (разд. 3), которые позволяют существенно упростить доказательства утверждений.

Крайними будем называть ТП с минимальным или максимальным временем накопления, остальные ТП – *промежуточными*.

Для каждого участника модели (потребителя, государства, банка) определяем их полезности или выигрыши (возможно, отрицательные) от использования данной линейки. А именно: государство несет издержки на дотации, банк имеет прибыль от вкладов и выплат по кредитам потребителей, а потребитель несет издержки при получении квартиры и извлекает полезность от ее использования, т.е. имеет интегральную полезность[1] от линейки.

Линейка называется *справедливой*, если на промежуточных тарифных планах с ростом времени накопления параметры изменяются монотонно: время кредитования и ставка субсидий не убывают, а ставки по взносам и кредитам не возрастают. Это свойство позволяет организовать линейку так, что более состоятельным участникам оказывается выгодным выбирать планы с меньшими сроками накопления, более низкими ставками премии на сбережения и более высокими ставками процента за кредит. Справедливые линейки обеспечивают плавный переход агентов к более рыночным ипотечным планам по мере роста доходов.

Линейка называется *сплошной*, если она содержит промежуточные планы со всеми возможными временами накопления и кредитования. Сплошные линейки предоставляют потребителю больше возможностей для выбора подходящего им тарифного плана.

Линейка называется *правильной*, если исключение любого подмножества из ее промежуточных тарифных планов не выгодно ни одному из агентов, и *локально правильной*, если ни одному из агентов не выгодно исключение любого (одного) промежуточного плана. Правильная линейка устойчива в том смысле, что все три агента (потребитель, банк и государство) заинтересованы в сохранении ее структуры.

Наконец, можно говорить об *эффективности* (Парето-оптимальности) линейки в обычном смысле – как набора тарифных планов, который нельзя улучшить для одного из агентов, не ухудшив условия для кого-нибудь другого.

Структура статьи. В разд. 3 мы накладываем некоторые разумные ограничения на параметры ТП, которые позволяют существенно упростить доказательства утверждений. В разд. 2–6 выводится закон сохранения, показано, что взносы в тарифных планах линейки должны убывать по мере возрастания времени накопления (разд. 5). В разд. 7–11 приведены основные результаты, касающиеся полезных свойств линейки, доказана эквивалентность правильности и локальной правильности линейки (разд. 7), а также сформулировано необходимое и достаточное условие правильности линейки в виде неравенств на выигрыши агентов; доказывается, что для каждой линейки существует эквивалентная ей справедливая линейка (разд. 8). В разд. 10 приводятся описание свойств эффективных линеек и пример краснодарской эффективной линейки, для которой не существует эквивалентной ей правильной линейки. В разд. 11 найдены достаточные условия на сплошность эффективной линейки и проведена их проверка на частном примере краснодарских линеек. В заключительной части статьи (разд. 12) сформулированы возможные направления исследований.

2. ТАРИФНЫЕ ПЛАНЫ

Приведем определение тарифного плана и сформулируем предположения, которые были выдвинуты в статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014а) и на которые мы будем опираться и здесь.

Тарифным планом называется следующий набор параметров: срок накопления τ, ставка по депозиту p, величина премии на сбережения в процентах s, максимальная P_{max} и минимальные P_{min} величины ежемесячного взноса, на которые начисляется премия, срок кредита $\tau_{кр}$, отношение объема кредита к накопленной сумме Λ, ставка по кредиту c.

Будем считать, что потребители планируют приобрести квартиры одинаковой площади и стоимости K. Стоимость выражается через параметры тарифного плана и параметры потребителя (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014а, с. 11):

$$P\left[((1+p)^{\tau}-1)\frac{1+p}{p}+s\,\tau\right]+B\left[\frac{1}{c}\,\frac{(1+c)^{\tau_{кр}}-1}{(1+c)^{\tau_{кр}}}\right]=K. \tag{1}$$

[1] В дальнейшем мы будем использовать термин “полезность потребителя”, или “выигрыш потребителя”, имея в виду интегральную полезность.

Здесь первое слагаемое – объем накоплений потребителя, второе – размер кредита; P и B – размеры взноса и выплат по кредиту соответственно. Тогда размер взноса P должен быть зафиксирован. Естественно предположить, что он совпадает с максимальной величиной P_{max} ежемесячного взноса, на который начисляется премия.

Предполагаем, что ежемесячные взносы участника P равны его ежемесячным платежам по кредиту B. Если платеж больше взносов, банк несет дополнительный риск, а если меньше, то возможности заемщика недооценены, и вполне вероятно, что он будет стремиться вернуть кредит раньше предусмотренного планом срока. Эти соображения актуальны, когда речь идет о длительных сроках накопления, но мы используем их во всех случаях.

При ограничениях $P = B = P_{max}$ тарифный план задается пятью параметрами: сроками накопления τ и кредитования $\tau_{кр}$, ставками по депозиту p и кредиту c и величиной премии на сбережения в процентах s. Действительно, тогда $P_{max} = P$ находится по формуле (1), а параметр Λ – из соотношения

$$\Lambda = \frac{1}{c} \times \frac{(1+c)^{\tau_{кр}} - 1}{(1+c)^{\tau_{кр}}} \Big/ \left[((1+p)^{\tau} - 1)\, \frac{1+p}{p} + s\tau \right]. \tag{2}$$

Зафиксируем тарифный план $\{\tau, \tau_{кр}, p, s, c\}$, он задается банком. Чтобы определить выигрыши банка, государства и потребителя, необходимо понять, сколько потребителей могут и будут использовать данный тарифный план. Это довольно сложный вопрос, выходящий за рамки моделирования ССП. Возможности потребителей зависят от внешних экономических условий (доходов, цен на жилье и другие товары, банковские ставки по депозитам и кредитам и др.). Будем рассматривать максимально простую ситуацию.

Каждый потребитель представляет семью, которая способна откладывать в месяц от 20 до 30% своего месячного дохода для ипотечного кредитования (процент зависит от уровня дохода). Таким образом, каждый потребитель способен тратить на ССП в месяц не больше определенной суммы, называемой *максимально допустимой величиной взноса*.

В нашей модели будем считать, что приток потребителей и распределение этого притока по максимально возможной величине взноса не зависит от набора ТП и постоянен во времени. Как было указано выше, мы считаем, что потребители хотят приобрести квартиру одинаковой площади и стоимости K.

Тарифный план назовем *допустимым* для потребителя, если ежемесячный взнос по этому тарифному плану не превосходит максимально допустимого взноса для этого потребителя. Это означает, что потребитель способен приобрести квартиру по данному тарифному плану.

Будет ли использовать потребитель данный тарифный план или нет? Это зависит от того, есть ли у него более выгодные тарифные планы, чем данный. Пусть дан конечный набор тарифных планов. Естественно предположить, что потребитель выбирает из всех допустимых планов план с максимальным выигрышем. Если планов с максимальным выигрышем несколько, логично считать, что потребитель выберет из них план с минимальным временем накопления для скорейшего получения квартиры.

При таких предположениях часть планов может стать невыгодной для всех потребителей. Если выкинуть эти планы из набора, то по оставшейся части легко определить, как распределятся потребители между планами. А именно данный ТП будут использовать все потребители, для которых этот план допустим, но недопустимы ТП с бóльшим выигрышем.

3. ЛИНЕЙКИ

В данном разделе мы сначала введем общее определение линейки, а потом укажем необходимые нам ограничения на линейку.

В статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014а) линейка – это конечный набор тарифных планов. Какие ограничения разумно ввести на этот набор?

Прежде всего мы хотим исследовать переход от ССП к коммерческой ипотеке. Поэтому для любой линейки параметры крайних планов (с максимальным и минимальным временем накопления) должны соответствовать ТП ССП и коммерческой ипотеки соответственно.

Для того чтобы существовали эффективные (Парето-оптимальные) линейки, множество рассматриваемых линеек должно быть замкнутым. Отсюда следует, что параметры тарифных планов должны быть ограничены сверху и снизу. Кроме того, должно быть введено ограничение на число тарифных планов, иначе возможна ситуация, когда каждую линейку можно улучшить, добавив еще один тарифный план. Исходя из того, что банк обычно рассчитывает на конкретные сроки накопления и кредитования, будем предполагать, что они заранее заданы. Для удобства положим, что все тарифные планы в линейке используются по крайней мере одним потребителем. Это несущественное ограничение: из каждого набора тарифных планов можно выкинуть все ТП, которые не имеют своего потребителя. Кроме того, будем считать, что в линейке на плане с бóльшим временем накопления время кредитования не меньше. Это разумное предположение: у потребителей с бóльшим временем накопления будет меньший взнос. Вместе с тем оно значительно упрощает выкладки и позволяет доказать необходимые утверждения.

Подытожим наши ограничения. Под линейкой будем подразумевать набор тарифных планов, в котором:

– параметры крайних тарифных планов зафиксированы[2] (и соответствуют ССП и коммерческой ипотеке);

– время накопления и кредитования выбираются из заранее заданного списка, при этом при увеличении времени накопления время кредитования не уменьшается;

– ставки по кредиту, взносу и субсидиям ограничены;

– каждый тарифный план используется хотя бы одним потребителем.

В качестве основного примера рассмотрим класс линеек, описанный в статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014a). Тарифный план ССП построен на основе программы, запущенной в Краснодаре: годовая ставка по вкладу 2%, по кредиту – 6%, субсидии – 30%, срок накопления 5 лет, срок кредитования 7,5 лет. Для коммерческого тарифного плана берутся существующие процентные ставки на рынке: годовая ставка по вкладу 5%, по кредиту – 12,5%, субсидии – 0%. Срок накопления – 1 год, срок кредитования возьмем такой же, как и в ССП, – 7,5 лет. В качестве промежуточных тарифных планов рассматриваем планы, в которых срок кредитования также 7,5 лет, а срок накопления – 2, 3 или 4 года. Таким образом, линейка может содержать от 2 до 5 тарифных планов. Линейки такого вида будем называть *краснодарскими*.

Обозначения для линейки. Введем удобные обозначения для линеек. Пусть дана линейка $\mathcal{A}$. Параметры тарифных планов в линейке $\mathcal{A}$ будем нумеровать по возрастанию сроков накопления и кредитования. Точнее, пусть заданы $(\tau_1, s_1, c_1, p_1, \tau_{\text{кр},1})$ и $(\tau_n, s_n, c_n, p_n, \tau_{\text{кр},n})$ – крайние тарифные планы коммерческой ипотеки и ССП соответственно.

Формальное определение линейки выглядит следующим образом.

Линейкой с заданными крайними тарифными планами $(\tau_1, s_1, c_1, p_1, \tau_{\text{кр},1})$ и $(\tau_n, s_n, c_n, p_n, \tau_{\text{кр},n})$ и промежуточными значениями $\tau_2,\ldots, \tau_{n-1}, \tau_{\text{кр},2},\ldots, \tau_{\text{кр},n-1}$, где $\tau_1 < \ldots < \tau_n$, $\tau_{\text{кр},1} \le \ldots \le \tau_{\text{кр},n}$, называется множество индексов $S \subset \{2, \ldots, n-1\}$ и набор параметров тарифных планов s_i, c_i, p_i при всех $i \in S$. На параметры накладываются следующие ограничения:

1) выполнены неравенства $s_1 \le s_i \le s_n, c_1 \ge c_i \ge c_n, p_1 \ge p_i \ge p_n$ при всех $i \in S$[3];

2) при данных параметрах каждый тарифный план $i \in S$ используется по крайней мере одним потребителем.

---

[2] Мы фиксируем параметры крайних тарифных планов. Если не делать для них ограничений, то в эффективных линейках данные планы уже не будут соответствовать коммерческой ипотеке. К примеру, если рассматривать линейки с наибольшим выигрышем потребителя (они, очевидно, будут эффективными), то в них взносы должны быть как можно ниже. Отсюда следует, что процентные ставки по кредитам будут минимальными, а ставки по взносам и субсидии – максимальными, что не соответствует нашим представлениям о крайнем коммерческом плане.

[3] Логично предположить, что экстремальные значения параметров достигаются на крайних планах: при любых ограничениях на параметры можно считать, что крайние планы будут использовать минимальные или максимально возможные допустимые значения.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех линеек, которые задаются набором параметров $\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{\text{кр},1}, \ldots, \tau_{\text{кр},n}, s_1, c_1, p_1, s_n, c_n, p_n$. Поймем, как в данных обозначениях переписываются свойства линеек, определенные в разд. 1.

По определению, линейка является сплошной тогда и только тогда, когда содержит все доступные промежуточные тарифные планы, т.е. $S = \{2, \ldots, n-1\}$. Справедливость линейки означает, что для всех $i < j$, $i, j \in S$ выполняются неравенства $s_i \le s_j$, $p_i \ge p_j$, $c_i \ge c_j$.

Для каждого подмножества $S' \subset S$ можно определить линейку $\mathcal{A}|_{S'}$, получаемую из линейки $\mathcal{A}$ выбрасыванием всех тарифных планов, номера которых не входят в S'.

Если обозначить выигрыши банка, государства и потребителя от использования линейки $\mathcal{A}$ через $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, $G_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ соответственно, то линейка является правильной (локально правильной) в том и только в том случае, когда $G_{\mathcal{A}} \ge G_{\mathcal{A}}|_{S'}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \ge G_{\mathcal{A}}|_{S'}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \ge \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}|_{S'}$ для любого подмножества $S' \subset S$ (соответственно для любого подмножества $S' \subset S$, где $|S'| = |S| - 1$).

Линейка $\mathcal{A}$ эффективна тогда и только тогда, когда не существует такой линейки $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$, что выполнены неравенства $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \ge \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, $G_{\mathcal{B}} \ge G_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \ge \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ и при этом хотя бы одно из неравенств строгое.

В следующем разделе будет показано, как определять выигрыш банка, государства и потребителя от использования отдельного тарифного плана.

4. ВЫИГРЫШИ АГЕНТОВ ОТ ТАРИФНОГО ПЛАНА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

Зафиксируем тарифный план $(\tau_i, s_i, c_i, p_i, \tau_{\text{кр},i})$. Выигрыши агентов от данного ТП рассчитываются при помощи динамической модели (подробнее см. статью (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014б)). В каждый момент времени в систему вступает один потребитель с параметрами данного ТП. Первые τ_i периодов он приносит в банк взнос в размере P_i. Государство выплачивает субсидии в размере $s_i P_i$. Банк начисляет процент p_i на остаток средств на счете. После окончания накопления потребитель получает контрактную сумму K и в течение $\tau_{\text{кр},i}$ периодов выплачивает кредит на оставшуюся часть контракта по аннуитету со ставкой c_i, внося каждый момент времени P_i средств. После выплаты кредита он выходит из системы.

Для расчета полезностей потребителя, издержек государства и прибыли банка введем норму дисконтирования λ. Стоимость L средств в момент времени t составит $L\delta^t$, где $\delta = 1/(1 + \lambda)$ (т.е. потребитель каждый период времени теряет полезность $L(1 - \delta)$).

Действия банка выглядят следующим образом. Каждый момент времени банк собирает *кредитную массу*, т.е. средства со всех потребителей, находящихся в системе (взносы, выплаты по кредитам), а также субсидии на взносы от государства. Кроме того, в кредитную массу добавляется остаток средств с предыдущего периода (который может быть как положительным, так и отрицательным). Часть собранных процентов считается прибылью банка, остальное образует остаток кредитной массы. Если остаток положительный, банк использует его для получения инвестиций по ставке u. Если остаток кредитной массы отрицательный, банк берет займ по ставке z на недостающую сумму[4].

Общей прибылью банка назовем дисконтированную сумму прибылей за каждый период. Ключевой вопрос, как банк будет распределять прибыль с учетом соотношения коэффициентов λ, u и z. В случае их равенства банку все равно, как распределять средства между прибылью и остатком кредитной массы. Если же эти коэффициенты неравны, банк может либо стремиться забирать средства из системы как можно раньше, либо, наоборот, оставлять средства в системе как можно дольше. Таким образом, банк получает больше стимулов для манипуляций параметров.

Положим для простоты, что $\lambda = u = z$.

[4] Здесь мы не учитываем издержек банка на обслуживание счетов, страхования, инфляции и т.п.

Теорема 1 (общий закон сохранения). *Дисконтированная сумма чистых издержек потребителя и государства равна прибыли банка (все в расчете на одного потребителя).*

Доказательство. При $\lambda = u = z$ для банка нет никакой разницы между тем, чтобы забрать средства в данный момент времени или оставить их в системе, не трогая их, и каждый раз получать с них проценты. А если понадобятся новые средства, банк может взять заем и бесконечное число периодов гасить проценты. Или погасить заем и не иметь инвестиций с погашенной части. В результате общая прибыль банка равна сумме прибылей, которую банк получает от каждого потребителя по отдельности с учетом дисконта.

Вычислим прибыль банка от одного потребителя. Потребитель в течение $\tau_i + \tau_{\text{кр},i}$ периодов вносит в банк P_i средств, государство выплачивает субсидии в размере $s_i P_i$ на стадии накопления, т.е. первые τ_i периодов после вступления потребителя в систему. Таким образом, с учетом дисконта в банк поступают средства в размере

$$P_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1})+s_iP_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i-1}).$$

Банк выдает потребителю контракт K через τ_i периодов после вступления потребителя в систему. Таким образом, преобразовывая выражение, имеем прибыль банка равную

$$\frac{1}{1-\delta}(P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})+s_i(1-\delta^{\tau_i}))-K\delta^{\tau_i}.$$

При этом $s_iP_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i-1})$ – это в точности издержки государства на потребителя, $P_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1})-K\delta^{\tau_i}$ – чистые издержки потребителя на покупку квартиры. Отсюда дисконтированная сумма чистых издержек потребителя и государства равна прибыли банка. ■

Определим прибыль банка $\mathcal{D}_i$ и издержки государства G_i в расчете на одного потребителя. Используя формулы из доказательства теоремы 1, получаем:

$$G_i=-\frac{1}{1-\delta}s_iP_i(1-\delta^{\tau_i}), \tag{3}$$

$$\mathcal{D}_i=\frac{1}{1-\delta}(P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})+s_i(1-\delta^{\tau_i}))-K\delta^{\tau_i}. \tag{4}$$

При этом полезность $\mathcal{D}_i$ одного потребителя от ТП i не совпадает с чистыми издержками на ее приобретение, а еще и учитывает полезность от владения квартиры (полезность от владения квартирой – это дисконтированная сумма полезностей A с момента ее получения[5]). Тогда $\mathcal{Q}_i$ находится по формуле

$$\mathcal{Q}_i=A(\delta^{\tau_i}+\delta^{\tau_i+1}+\ldots)-P_i(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{\tau_i-1})-P_i(\delta^{\tau_i}+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1}),$$

где первое слагаемое соответствует полезности от владения квартирой, а второе и третье – издержки от покупки квартиры на стадии накопления и кредитования. Преобразуем выражение в правой части равенства:

$$A(\delta^{\tau_i}+\delta^{\tau_i+1}+\ldots)-P_i(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{\tau_i-1})-P_i(\delta^{\tau_i}+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1})=$$
$$=\frac{1}{1-\delta}[A\delta^{\tau_i}-P_i(1-\delta^{\tau_i})+P_i\delta^{\tau_i}(1-\delta^{\tau_{\text{кр},i}})]=$$
$$=\frac{1}{1-\delta}[A\delta^{\tau_i}-P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})].$$

Таким образом, получаем формулу для нахождения полезности потребителя $\mathcal{Q}_i$ от ТП:

$$\mathcal{Q}_i=\frac{1}{1-\delta}[A\delta^{\tau_i}-P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})]. \tag{5}$$

[5] Полезность A ассоциируется с экономией средств от аренды квартиры. То есть предполагается, что первые τ_i периодов нахождения в системе потребитель арендует квартиру по стоимости A, а после получения квартиры ему не нужно тратить на нее средства.

Из теоремы 1 непосредственно следует соотношение для выигрышей $\mathcal{D}_i$, G_i и $\mathcal{Q}_i$:

$$\mathcal{D}_i + G_i + \mathcal{Q}_i = \left(\frac{A}{1-\delta} - K\right)\delta^{\tau_i}. \quad (6)$$

Действительно, по нашим определениям, полезность потребителя не совпадает с его чистыми издержками: он получает не средства в размере K, а полезность от владения квартирой $A/(1-\delta)$. Что и отражено в формуле (6).

Мы нашли прибыль банка D_i, издержки государства G_i, полезность потребителя Q_i от использования тарифного плана $(\tau_i, s_i, c_i, p_i, \tau_{\text{кр},i})$ линейки $\mathcal{A}$ в расчете на одного потребителя. Вообще говоря, прибыль банка и издержки государства рассчитываются на всех потребителей одновременно. Однако ввиду однородности формул прибыль участников системы от всей линейки равна сумме прибылей по каждому тарифному плану в отдельности. Это позволяет найти явную формулу для их выигрышей. Для этого необходимо распределить потребителей по тарифным планам.

5. МОНОТОННОСТЬ ВЗНОСОВ

Для того чтобы понять, как распределяются потребители по тарифным планам, докажем полезное утверждение.

Теорема 2. *Если для двух тарифных планов из линейки $\mathcal{A}$ время накопления на первом плане меньше, то выигрыш потребителя не меньше, а взнос потребителя больше на первом плане. В данных выше обозначениях, если $i, j \in S$ и $i < j$, то $\mathcal{Q}_i \geq Q_i$, $P_i > P_j$.*

Для ее доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Если у двух тарифных планов $i, j \in S$ на первом плане выигрыш потребителя больше ($\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$), то и взнос больше ($P_i > P_j$). В обратную сторону выполняется только нестрогое неравенство: если $P_i > P_j$, то $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$.*

Доказательство леммы 1. Если для двух планов $i, j \in S$, план с большим выигрышем $\mathcal{Q}_i$ имеет меньший или равный взнос P_i, чем на другом плане, т.е. $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{Q}_j$, то $P_i \leq P_j$ план j невыгодно использовать ни одному из потребителей.

Но, по определению линейки, каждый тарифный план имеет по крайней мере одного потребителя. Поэтому данная ситуация невозможна, и при $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$ должно быть выполнено неравенство $P_i > P_j$.

В обратную сторону утверждение легко доказывается от противного. ■

Доказательство теоремы 2. В силу второй части леммы 1 достаточно доказать неравенство $P_i > P_j$. Предположим, что оно неверно, и $P_i \leq P_j$. Покажем, используя формулу (5), что $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$.

Параметр дисконтирования λ положителен, а значит, $\delta = 1/(1 + \lambda) < 1$. Поэтому функция δ^k монотонно убывает с увеличением k. Тогда, опираясь на неравенство $\tau_i + \tau_{\text{кр},i} < \tau_j + \tau_{\text{кр},j}$ получаем цепочку:

$$\mathcal{Q}_i(1-\delta) = A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) - P_i >$$

$$> A\delta^{\tau_j} + P_i\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}} - P_i = A\delta^{\tau_j} - P_i(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) \geq$$

$$\geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1- \delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) = \mathcal{Q}_j(1-\delta),$$

откуда $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$, и в силу леммы 1 выполнено неравенство $P_i > P_j$, что противоречит нашему предположению.

Следствие 1. С ростом времени накопления взносы по тарифным планам в линейке уменьшаются, выигрыши потребителей не увеличиваются: $P_1 > \ldots > P_i > \ldots > P_n$, $\mathcal{Q}_1 \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_i \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_n$.

Согласно следствию тарифным планом $i \in S$ воспользуются те потребители, которые готовы платить P_i средств, но не готовы платить следующую по порядку величину взноса в линейке.

6. ВЫИГРЫШИ АГЕНТОВ ОТ ЛИНЕЙКИ

Мы готовы определить выигрыши агентов от всей линейки. Допустим, задана линейка $\mathcal{A}$ в обозначениях, данных в разд. 3. Пусть f – функция распределения потребителей по величине допустимого семейного платежа. Ее можно вычислить, исходя из данных по семейному доходу домашних хозяйств (например, как это сделано в статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014a)). Из сказанного выше следует, что долю α_i потребителей, участвующих в тарифном плане i, можно найти по формуле: при $S = \{i_2,\ldots, i_{m-1}\}$, $i_1 = 1$, $i_m = n$, причем $i_2 <\ldots< i_{m-1}$, то

$$\alpha_{i_k} = \begin{cases} f(P_1), & k = 1; \\ f(P_{i_k}) - f(P_{i_{k-1}}), & 1 < k \leq m. \end{cases} \tag{7}$$

Считая, что если в каждый период приходят 100 новых потребителей, распределенных по величине допустимого семейного платежа в соответствии с функцией распределения f, то число β_k потребителей, использующих тарифный план $k \in S \cup \{1, n\}$, задается формулой:

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\sum\limits_{j \in S \cup \{1,n\}} \alpha_j} \times 100. \tag{8}$$

Отсюда выигрыши агентов от линейки $\mathcal{A}$ можно найти по формуле[6]:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j \mathcal{D}_j,\ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j \mathcal{Q}_j,\ G_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j G_j.$$

Очевидно, что для линеек соотношение (6) можно переписать в виде:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} + G_{\mathcal{A}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \left(\frac{A}{1-\delta} - K\right) \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j \delta^{\tau_j}. \tag{9}$$

Мы ввели определение линейки, выигрыши участников системы, установили монотонность взносов и доказали закон сохранения. Теперь поговорим о том, как полезные свойства линейки связаны между собой. В следующем разделе мы покажем, что понятия правильной и локально правильной линейки эквивалентны.

7. ПРАВИЛЬНЫЕ ЛИНЕЙКИ

Везде в этом разделе мы предполагаем, что задана линейка $\mathcal{A}$ с набором промежуточных тарифных планов $S = \{i_2,\ldots,i_{m-1}\}$, где $i_1 = 1$, $i_m = n$, $i_2 <\ldots< i_{m-1}$.

Теорема 3. *Для линейки $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) линейка $\mathcal{A}$ является правильной;

2) линейка $\mathcal{A}$ является локально правильной;

3) выигрыши банка и государства монотонно убывают с увеличением времени накопления.

В данных выше обозначениях для линейки $\mathcal{A}$ условие (3) записывается в виде:

$$\mathcal{D}_{i_1} \geq \ldots \geq \mathcal{D}_{i_k} \geq \ldots \geq \mathcal{D}_{i_m},\ G_{i_1} \geq \ldots \geq G_{i_k} \geq \ldots \geq G_{i_m}. \tag{10}$$

Напомним, что линейка называется правильной, если при удалении любого числа промежуточных тарифных планов всем участникам (государству, банку и потребителю) становится хуже, и локально правильной, если это верно при удалении одного (любого) промежуточного тарифного

[6] Отметим, что в статье (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014a) прибыль банка определялась не для тарифного плана, а для всей линейки сразу. Однако, как несложно показать, в данных нами ограничениях формула будет одинаковая: сумма взвешенной прибыли со всех тарифных планов и прибыль от данного набора тарифных планов будет по сути одна и та же.

плана. Ясно, что правильная линейка является локально правильной. То есть из условия 1 теоремы 3 следует условие 2. Докажем, что из условия 2 теоремы 3 следует 3, а из условия 3 – условие 1.

Будем придерживаться обозначений, приведенных выше. Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Выкидывание тарифного плана $i_k \neq n$ из линейки $\mathcal{A}$ не выгодно ни для кого из агентов тогда и только тогда, когда* $\mathcal{D}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{D}_{i_k}, G_{i_{k+1}} \leq G_{i_k}$.

Доказательство леммы 2. Действительно, пусть мы исключили тарифный план i_k, получив новую линейку $\mathcal{B}$. Потребители выбирают план с наибольшим допустимым взносом. По теореме 2 взносы монотонны: $P_{i_1} > \ldots > P_{i_k} > \ldots > P_{i_m}$. Тогда все потребители, использующие тарифный план i_k, перейдут на тарифный план i_{k+1}, а остальные потребители останутся на своих тарифных планах. Следовательно, выигрыши агентов при новой линейке $\mathcal{B}$ рассчитываются по формуле

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \beta_1 \mathcal{D}_{i_1} + \ldots + \beta_{i_{k-1}} \mathcal{D}_{i_{k-1}} + (\beta_{i_{k+1}} + \beta_{i_{k+1}}) \mathcal{D}_{i_{k+1}} + \ldots + \beta_n \mathcal{D}_{i_m} =$$
$$= \mathcal{D}_{\mathcal{A}} - \beta_{i_k} \mathcal{D}_{i_k} + \beta_{i_k} \mathcal{D}_{i_{k+1}} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}} + \beta_{i_k}(\mathcal{D}_{i_{k+1}} - \mathcal{D}_{i_k}).$$

Отсюда $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{D}_{i_k}$.

Аналогично, $G_{\mathcal{B}} \leq G_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow G_{i_{k+1}} \leq G_{i_k}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{Q}_{i_k}$. Осталось заметить, что неравенство $\mathcal{Q}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{Q}_{i_k}$ выполнено всегда в силу теоремы 2. Поэтому достаточно потребовать выполнения неравенств $\mathcal{D}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{D}_{i_k}, G_{i_{k+1}} \leq G_{i_k}$.

Доказательство теоремы 3.

2 $\Rightarrow$ 3. Предположим, что линейка $\mathcal{A}$ локально правильная. Тогда для каждого промежуточного плана его выкидывание не улучшит ситуации ни для кого из агентов. По лемме 2 это утверждение равносильно тому, что выполнены неравенства (10).

3 $\Rightarrow$ 1. Предположим, что имеют место неравенства (10). По теореме 2 выполнены неравенства $\mathcal{Q}_{i_1} \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_{i_k} \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_{i_m}$. Предположим, что мы хотим убрать набор промежуточных тарифных планов $S' \subset S$. Будем убирать их по очереди. На каждом шаге значения $\mathcal{D}_j$, G_j, $\mathcal{Q}_j$ не меняются. Так как для любого шага справедливо условие леммы 2, то на каждом шаге ситуация для всех агентов не улучшается. Значит, и после удаления всех планов она не улучшится. Таким образом, линейка является правильной. ■

Таким образом, мы не только доказали, что правильная линейка является локально правильной, но и указали критерий проверки правильности линейки. Теперь перейдем к изучению эффективных линеек. Сначала поговорим о том, можно ли поменять параметры линейки (не меняя выигрыша агентов) так, чтобы получить справедливую линейку.

8. СПРАВЕДЛИВЫЕ ЛИНЕЙКИ

Сначала отметим очевидное, но очень важное следствие соотношений (3)–(5).

Утверждение 1[7]. *Выигрыши потребителя, банка и государства данного тарифного плана i зависят от значений P_i, s_i, τ_i, $\tau_{\text{кр},i}$ и не зависят от конкретных значений ставок по взносам p_i и кредитам c_i.*

Из этого утверждения следует, что ставки по взносам и кредитам можно изменять внутри одного тарифного плана, не меняя при этом выигрыша агентов. А именно для данного тарифного

[7] На самом деле ставки p_i и c_i не могут быть выбраны совсем произвольно. Банк в момент получения потребителями первых контрактов теряет больше, чем получает (выплат по кредитам не хватает, он выдает контракты за счет накопления других вкладчиков). Данное состояние называется *кассовым разрывом*. Для его сглаживания банку выгодно привлечь т.н. *друзей вкладчиков*, которые будут только накапливать средства, но не получать кредита. Друзей вкладчиков не может быть много, так как государство не будет тратить много средств на них. В результате компромисса между банком, государством и потребителем устанавливается значение p_i (а значит, и c_i).

плана i можно заменить на p_i на $\tilde{p}_i$, c_i на $\tilde{c}_i$ так, чтобы сохранилось соотношение

$$K = P_i\left(s_i\tau_i + \frac{1+\tilde{p}_i}{p_i}((1+\tilde{p}_i)^{\tau_i} - 1) + \frac{1}{\tilde{c}_i}\,\frac{(1+\tilde{c}_i)^{\tau_{\text{кр},\,i}} - 1}{(1+\tilde{c}_i)^{\tau_{\text{кр},\,i}}}\right). \tag{11}$$

Несложно показать, что при фиксированных параметрах P_i, s_i, τ_i, $\tau_{\text{кр},\,i}$ увеличение ставки на взнос приведет к увеличению ставки на кредит. Таким образом, в пределах одного тарифного плана пару ($\tilde{p}_i$, $\tilde{c}_i$) можно увеличивать (уменьшать) с сохранением соотношения (11), пока один из параметров не станет максимальным (минимальным).

Отсюда вытекает, что эффективная линейка не обязана быть справедливой: взяв эффективную линейку, можно менять параметры внутри разных тарифных планов так, чтобы они перестали не убывать с увеличением времени накопления. Однако банк, государство и агент заинтересованы прежде всего в значении собственного выигрыша. Если для данной эффективной линейки можно предложить справедливую линейку с теми же выигрышами (а значит, тоже эффективную), то агентам нет причин отказываться от использования более привлекательно выглядящей линейки.

Логично ввести следующее определение. Назовем две линейки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *эквивалентными*, если они одинаковы с точки зрения выигрышей агентов системы, т.е. $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}, G_{\mathcal{A}} = G_{\mathcal{B}}$. Очевидно, что линейка, эквивалентная эффективной линейке, является эффективной.

Докажем, что любая линейка эквивалентна некоторой справедливой линейке, т.е. следующую теорему.

Теорема 4. *Для каждой линейки существует эквивалентная ей справедливая линейка.*

Данная теорема следует из леммы.

Лемма 3. *Для линейки $\mathcal{A}$ с набором промежуточных тарифных планов $S = \{i_2,\ldots,i_{m-1}\}$ существует эквивалентная ей линейка $\mathcal{B}$, в которой ставки субсидий не увеличиваются с ростом времени накопления: $s_{i_1} \le \ldots \le s_{i_m}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Пусть лемма 3 доказана. Тогда можно считать, что в линейке $\mathcal{A}$ с набором промежуточных тарифных планов $S = \{i_2,\ldots,i_{m-1}\}$ ставки субсидий не уменьшаются с ростом времени накопления. Таким образом, достаточно добиться того, чтобы ставки по взносам и кредитам не увеличивались с ростом времени накопления.

Как было показано выше, если в промежуточном тарифном плане изменить ставки по взносу и кредиту так, чтобы взнос остался неизменным, то получим линейку, эквивалентную данной.

Будем делать это последовательно. Рассмотрим цепочку переходов $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \to \ldots \to \mathcal{A}_m$ к эквивалентным линейкам. На шаге k будем изменять параметры только тарифного плана i_k. А именно будем непрерывно увеличивать ставки по взносу p_{i_k} и кредиту c_{i_k}, не изменяя взноса P_{i_k}, пока один из параметров не станет равен значению соответствующего параметра из тарифного плана i_{k-1}.

К примеру, при переходе $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_2$ на тарифном плане i_2 будем увеличивать ставки по взносу и кредиту, не меняя P_2, пока один из параметров не станет максимальным. Далее, увеличим ставки по взносу и кредиту на тарифном плане i_3, пока один из параметров не совпадет с (p_{i_2}, c_{i_2}). И так далее.

Таким образом, на каждом шаге мы меняем параметры так, чтобы они изменялись монотонно: по нашему построению $p_{i_1} \ge p_{i_2} \ge \ldots, c_{i_1} \ge c_{i_2} \ge \ldots$. Поэтому линейка $\mathcal{A}_m$ будет справедливой и будет эквивалентна линейке $\mathcal{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Основная идея аналогична доказательству теоремы, однако мы уже не можем свободно изменять ставку субсидий, поскольку от нее напрямую зависит прибыль государства и банка. Поэтому поступим следующим образом: будем менять ставки взноса, кредита и субсидий на двух соседних промежуточных тарифных планах так, чтобы выполнялись условия: не менялся взнос и получилась линейка, эквивалентная данной, но при этом ставка субсидий на плане с большим временем накопления была не меньше. Путем аккуратного изменения ставки субсидий на всех соседних промежуточных планах мы получим линейку, у которой ставки субсидий не уменьшаются с увеличением времени накопления.

Разобьем доказательство на две части. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 4. *Рассмотрим линейку $\mathcal{A}$ и два соседних промежуточных тарифных плана $i, j \in S$, причем $\tau_i < \tau_j$, а $s_i > s_j$. Тогда можно так изменить параметры данных ТП, чтобы взносы P_i, P_j и функции выигрыша $\mathcal{D}_\mathcal{A}$, $G_\mathcal{A}$, $\mathcal{Q}_\mathcal{A}$ не поменялись, но при этом s_i уменьшилось, а s_j увеличилось.*

Доказательство леммы 4. Заметим, что выигрыш потребителя от одной линейки не зависит от ставки субсидий, а зависит лишь от взноса. Поэтому нас интересуют лишь выигрыши государства и банка. Исходя из соотношения (9), выполнено равенство

$$\mathcal{D}_i + G_i = \frac{1}{1-\delta} P_i (1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},\,i}}) - K\delta^{\tau_i},$$

и следовательно,

$$\beta_i(\mathcal{D}_i + G_i) + \beta_j(\mathcal{D}_j + G_j) = \beta_i \left(\frac{1}{1-\delta} P_i (1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},\,i}}) - K\delta^{\tau_i} \right) +$$
$$+ \beta_j \left(\frac{1}{1-\delta} P_j (1 - \delta^{\tau_j + \tau_{\text{кр},\,j}}) - K\delta^{\tau_i} \right).$$

Предположим теперь, что мы изменили ставки p_i, s_i, c_i, p_j, s_j, c_j так, что взносы P_i и P_j и сумма $\beta_i G_i + \beta_j G_j$ не изменились. Из равенства, приведенного выше, следует, что величина $\beta_i \mathcal{D}_i + \beta_j \mathcal{D}_j$ осталась той же. Так как перемены коснулись только тарифных планов i и j, то на других планах выигрыши агентов не изменились. Следовательно, мы получили эквивалентную линейку.

Теперь надо понять, как можно менять параметры p_i, s_i, c_i, p_j, s_j, c_j с условием сохранения величин P_i, P_j, $\beta_i G_i + \beta_j G_j$ при заданных ограничениях. Другими словами, нам следует решить задачу минимизации функции $s_i - s_j$ при заданных ограничениях:

$$p_{min} \le p_i \le p_{max},\ p_{min} \le p_j \le p_{max},\ c_{min} \le c_i \le c_{max},\ c_{min} \le c_j \le c_{max},$$
$$P_i = \text{const},\ P_j = \text{const},\ \beta_i G_i + \beta_j G_j = \text{const}.$$

Понятно, что при уменьшении (увеличении) ставки субсидий и сохранении взноса необходимо увеличивать (уменьшать) ставки по взносам или кредитам, а при уменьшении s_i или s_j увеличивается выигрыш государства $\beta_i G_i + \beta_j G_j$.

Проделаем следующие шаги:

1) если $c_i < c_{max}$, $c_j > c_{min}$, то уменьшим s_i, c_j и увеличим c_i, s_j так, чтобы значения P_i, P_j, $\beta_i G_i + \beta_j G_j$ не изменились;

2) если $c_i = c_{max}$, то уменьшим параметры p_i, c_i так, чтобы остальные параметры s_i, P_i, $\beta_i G_i$ не изменились, и применим шаг 1;

3) если $c_i = c_{min}$, то увеличим параметры p_j, c_j так, чтобы остальные параметры s_j, P_j, $\beta_j G_j$ не изменились, и применим шаг 1.

Шаг 1 можно проделать в силу непрерывности функций P_i, P_j, $\beta_i G_i + \beta_j G_j$: для каждой из них можно немного изменить указанные параметры так, чтобы сами функции не поменяли своего значения.

Шаги 2 и 3 можно сделать в силу непрерывности функции P_i, а также согласно условию, что $c_{min} < c_{max}$, $p_{min} < p_{max}$.

Отсюда мы получаем требуемое: сделав шаг 1, мы уменьшим s_i и увеличим s_j. ■

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим линейку $\mathcal{A}$ и определим множество $\mathcal{M}$ как множество линеек, которые: 1) эквивалентны линейке $\mathcal{A}$; 2) имеют тот же набор промежуточных тарифных планов $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$; 3) имеют те же взносы, что и у линейки $\mathcal{A}$.

Так как множество данных линеек задается нестрогими неравенствами и равенствами на параметры и целевые функции, множество параметров в $\mathcal{M}$ является замкнутым. Значит, найдется линейка с минимальным значением (среди всех возможных в $\mathcal{M}_1$) ставки субсидий на тарифном плане i_2. Обозначим через $\mathcal{M}_1$ множество таких линеек. Выберем в $\mathcal{M}_1$ подмножество линеек $\mathcal{M}_2$, у которых значение s_{i_2} минимально среди всех линеек из $\mathcal{M}_1$. По лемме 4, $s_{i_2} \geq s_{i_1}$, так как в противном случае существует линейка из $\mathcal{M}$, у которой ставка субсидий на плане i_1 меньше s_{i_1}, что противоречит минимальности s_{i_1}.

Затем рассмотрим $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_2$, у которой s_{i_3} минимальное среди всех возможных, и т.д. На шаге j получаем непустое множество линеек, у которых первые j ставок субсидий не убывают. Таким образом, по индукции получаем линейку, у которой ставки субсидий не убывают. ∎

Главный вывод данного раздела: для изучения значений выигрышей эффективных линеек достаточно рассмотреть справедливые эффективные линейки.

9. СПЛОШНОСТЬ И ПРАВИЛЬНОСТЬ ЭФФЕКТИВНЫХ ЛИНЕЕК

В разд. 8 мы получили, что, хотя не каждая эффективная линейка является справедливой, однако заменой параметров, не меняющих выигрыша агентов, можно получить справедливую эффективную линейку. Возникает вопрос, можно ли проделать то же самое с остальными свойствами линеек, описанных в разд. 2.

Например, верно ли, что любая эффективная линейка является сплошной, т.е. содержит все промежуточные тарифные планы? Какие к этому есть предпосылки? Согласно соотношению (9) для суммы выигрышей агентов линейки $\mathcal{A}$ с набором промежуточных ТП $S = \{i_2,\ldots,i_{m-1}\}$, где $i_1 = 1$, $i_m = n$, $i_2 < i_3 <\ldots< i_{m-1}$, выполнено соотношение

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + G_{\mathcal{A}} + \mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \left(\frac{A}{1-\delta} - K\right)(\beta_{i_1}\delta^{\tau_{i_1}} + \beta_{i_2}\delta^{\tau_{i_2}} + \ldots + \beta_{i_m}\delta^{\tau_{i_m}}),$$

где $i_1 = 1,\ldots,i_m = n$ – индексы тарифных планов. Ясно, что добавление еще одного промежуточного плана j увеличит суммарный выигрыш: если следующий за ним план имеет номер i_k, то в сумме в правой части выражения (6) слагаемое $\beta_{i_k}\delta^{\tau_{i_k}}$ заменится на $\beta_j\delta^{\tau_j} + (\beta_{i_k} - \beta_j)\delta^{\tau_{i_k}} > \beta_{i_k}\delta^{\tau_{i_k}}$ и общая сумма увеличится.

Поэтому в целом добавление тарифного плана увеличивает общий выигрыш. Однако совершенно неочевидно, почему добавление нового тарифного плана улучшит положение для одного из агентов, не ухудшив его для остальных. Ясно, что ответ зависит от соотношения параметров системы. Мы выпишем достаточные условия на наличие сплошной эффективной линейки, эквивалентной данной, и продемонстируем, как их проверять для случая краснодарской линейки.

Теперь перейдем к свойству правильности. В силу теоремы 3 правильность равносильна тому, что выигрыши агентов не увеличиваются с ростом времени накопления. Более того, у потребителя выигрыши обязаны уменьшаться. Будет ли эффективная линейка правильной? Это выглядит логично: на линейках с меньшим сроком накопления суммарный выигрыш агентов больше, и, возможно, удастся так распределить выигрыши агентов между тарифными планами, чтобы они не увеличивались. Однако так как речь идет только о государстве и банке, их суммарный выигрыш может быть и меньше на линейках с меньшим сроком накопления. В следующем разделе мы приведем пример эффективной неправильной линейки, для которой не существует эквивалентной ей правильной линейки.

10. КРАСНОДАРСКИЕ ЛИНЕЙКИ

Опишем краснодарские линейки, определенные в разд. 3.

Пусть тарифный план ССП построен на основе программы, запущенной в Краснодаре. В качестве единицы измерения времени возьмем месяц. Если q – годовая ставка процента, будем считать $q/12$ месячной ставкой. Тогда краснодарская линейка состоит из крайних планов: (12; 0; 0,05/12; 0,135/12; 90) для коммерческого ТП и (60; 30; 0,02/12; 0,06/12; 90) для субсидируемого тарифного плана, на промежуточных тарифных планах срок кредитования равен 7,5 годам (т.е. 90 периодов), срок накопления составляет 2, 3 или 4 года (соответственно 24, 36 или 48). Таким образом, $n = 5$, заданы тарифные планы (τ_i, s_i, c_i, p_1, $\tau_{\text{кр},i}$) для $i = 1$ и $i = 5$ и время накопления и кредитования для промежуточных тарифных планов. Множество промежуточных тарифных планов задается множеством индексов $S \subset \{2, 3, 4\}$.

Зафиксируем контракт $K = 1{,}535$ млн руб. и рассчитаем взносы на крайних тарифных планах P_1 и P_5 при помощи формулы (3) (напомним, что взносы и выплаты по кредитам у нас совпадают). Мы получим (будем округлять до целого числа), что $P_1 = 22\,300$, $P_5 = 10\,000$.

Рассчитаем выигрыши агентов, исходя из оценочных параметров аренды A =22 000 (Ильинский, Полтерович, Старков, 2014a) и дисконта $\lambda = 0{,}08/12$. Используя формулу (5), находим $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_5$. По теореме 2 для $i = 2, 3, 4$ выполнены неравенства $\mathcal{Q}_1 < \mathcal{Q}_1 < \mathcal{Q}_5$. Исходя из этих неравенств, можно получить ограничения на P_2, P_3, P_4:

$$11087 \le P_4 \le 12\,552;\ 14\,076 \le P_3 \le 15\,627;\ 17\,735 \le P_2 \le 19\,390.$$

Кроме того, докажем вспомогательное утверждение: *для любого достижимого значения P_i, где $i = 2$ и $i = 3$, можно так подобрать параметры s_i, c_i, p_i, чтобы $s_i = 0$. Так как при изменении параметров P_i меняется непрерывно, покажем, что все возможные значения P_i достигаются.*

Таблица 1. Границы для значений P_i при $s_i = 0$

i	Взнос	τ	$p_{i\,\text{год}}$, %	$c_{i\,\text{год}}$, %	$s_{i\,\text{год}}$, %
2	18 970	24	2	13,5	0
2	15 851	24	2	6	0
3	16 409	36	2	13,5	0
3	14 023	36	2	6	0

В табл. 1 приведены значения взноса при $s_i = 0$, $c_i = c_{max}$ или c_{min} и $p = p_{min}$ (для удобства указаны годовые ставки). В первой и третьей строчке мы получили максимальное возможное значение взноса при данных ограничениях параметров. Действительно, взнос максимален при минимальных субсидиях и ставке по взносу и максимальной ставке по кредиту.

Значение взноса во второй и четвертой строчках меньше, чем допустимые границы: 14 076 для 3-летнего плана, и 17 735 для 2-летнего. Это означает, что для любого допустимого значения взноса можно подобрать параметры так, чтобы ставка субсидий была равна 0.

Приведем пример.

Пример эффективной неправильной линейки. Рассмотрим линейку $\mathcal{A}$ с максимальным выигрышем потребителя среди всех возможных линеек. Очевидно, она является эффективной. Ясно, что на каждом тарифном плане мы берем максимальный выигрыш потребителя. По нашему условию он не может быть больше $\mathcal{Q}_1$.

В частности, рассмотрим тарифный план на 4 года с таким взносом P_4, что выполнено равенство $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_1$. Подставляя известные нам значения параметров, получаем, что $P_4 = 11\,087$. Тогда выигрыш потребителя от линейки $\mathcal{A}$, содержащей крайние планы и данный план на 4 года, равен $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \beta_1 \mathcal{Q}_1 + \beta_4 \mathcal{Q}_4 + \beta_5 \mathcal{Q}_5 = (\beta_1 + \beta_4)\mathcal{Q}_4 + \beta_5 \mathcal{Q}_5$. Так как $\mathcal{Q}_j$ и β_j увеличиваются при уменьшении P_i, получаем, что большего выигрыша нам не достичь: мы взяли максимальное возможное число потребителей, которые могут получить полезность $\mathcal{Q}_1$ (которая является максимально возможной).

Заметим, что в любой линейке, эквивалентной данной, взнос P_4 должен оставаться таким же. Действительно, мы не можем его увеличить, так как тогда полезность потребителя $\mathcal{Q}_4$ станет больше $\mathcal{Q}_1$, что противоречит определению линейки. Если же мы его уменьшим, то уменьшится и выигрыш потребителя на всей линейке, и тогда получившаяся линейка будет не эквивалентна данной.

Так как взнос P_4 не меняется, суммарный выигрыш государства и банка на этом ТП фиксирован. Подставляя значения параметров, получаем: $G_4 + \mathcal{D}_4 = -734 < G_5 + \mathcal{D}_5 = -514$. Отсюда выигрыш либо государства, либо банка на ТП с номером 4 меньше, чем на ТП с номером 5. Следовательно, любая линейка, эквивалентная данной, является неправильной. Мы получили эффективную линейку, у которой нет эквивалентных правильных линеек.

11. СПЛОШНОСТЬ ЭФФЕКТИВНОЙ ЛИНЕЙКИ

Для полноты описания выпишем достаточное условие на сплошность эффективной линейки, а потом рассмотрим случай краснодарской линейки.

Нам необходимо понять, когда к линейке можно добавить тарифный план так, чтобы выигрыш всех агентов не уменьшился. Обозначим через i номер тарифного плана, которого нет в линейке $\mathcal{A}$, а через j и k обозначим ближайшие к i тарифные планы из $\mathcal{A}$. Будем считать, что $k < j$. Добавим тарифный план i и посмотрим, при каком ограничении на параметры линейка с добавленным тарифным планом не ухудшит выигрышей всех агентов.

Для этого необходимо проверить, что к линейке $\mathcal{A}$ можно добавить хотя бы один тарифный план с номером i так, чтобы ТП i был востребован хотя бы одним потребителем.

Лемма 5. *В данных выше обозначениях всегда найдутся такие параметры p_i, s_i, c_i, удовлетворяющие необходимым ограничениям, что при добавлении к линейке $\mathcal{A}$ тарифного плана* (τ_i, $\tau_{\text{кр},i}$, p_i, s_i, c_i) *этот план будет использовать хотя бы один потребитель.*

Доказательство. Заметим, что достаточно найти ТП i, при котором выполняются неравенства $\mathcal{Q}_k \geq \mathcal{Q}_i \geq \mathcal{Q}_j$. Заметим, что $\mathcal{Q}_k \geq \mathcal{Q}_j$ и $P_k > P_j$ по лемме 1. Из формулы для $\mathcal{Q}_k$, $\mathcal{Q}_j$ получаем неравенство

$$A\delta^{\tau_k} - P_k(1-\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1-\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},j}}),$$

а из $A\delta^{\tau_k} > A\delta^{\tau_i} > A\delta^{\tau_j}$ и $\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}} \geq \delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}} \geq \delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},i}}$ вытекает, что выполнены неравенства:

$$A\delta^{\tau_k} - P_k(1-\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_i} - P_k(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}),$$

$$A\delta^{\tau_i} - P_j(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}).$$

Так как функция $f(x) = A\delta^{\tau_i} - x(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})$ непрерывна по x и убывает при увеличении x, причем $f(P_j) \geq \mathcal{Q}_j$, $\mathcal{Q}_k \geq f(P_k)$, то найдется такое $x_0 \in (P_k, P_j)$, что $\mathcal{Q}_k \geq f(x_0) \geq \mathcal{Q}_j$. Следовательно, можно взять $P_i = x_0$.

Осталось заметить, что $P_i \in (P_k, P_j)$. Так как P_i непрерывно зависит от параметров p_i, s_i, c_i, то можно подобрать значения p_i, s_i, c_i, которые расположены между соответствующими значениями ТП j и k, и поэтому они удовлетворяют необходимым ограничениям. ■

Найдем требуемые неравенства. После добавления тарифного плана i согласно лемме 2 выигрыши агентов изменятся по формулам:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + \beta_i(\mathcal{Q}_i - \mathcal{Q}_j),\, G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{A}} + \beta_i(G_i - G_j),\, \mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}} + \beta_i(\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_j),$$

где через $\mathcal{B}$ обозначена линейка $\mathcal{A}$ с добавленным тарифным планом i.

Линейка $\mathcal{B}$ не хуже линейки $\mathcal{A}$ для всех агентов в том и только в том случае, когда выполнены неравенства $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \geq \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$, $G_{\mathcal{B}} \geq G_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \geq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, что равносильно $\mathcal{Q}_i \geq \mathcal{Q}_j$, $G_i \geq G_j$, $\mathcal{D}_i \geq \mathcal{D}_j$, Первое неравенство следует из условия допустимости тарифного плана i. Таким образом, достаточно показать, что параметры тарифного плана i можно подобрать таким образом, что $G_i \geq G_j$, $\mathcal{D}_i \geq \mathcal{D}_j$. Выигрыши государства и банка зависят от P_i и s_i. Выписывая явные формулы для выигрыша государства и банка, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть дана линейка $\mathcal{A}$, не содержащая тарифного плана i, а j, $k \in S$, где $j > k$ – номера ближайших тарифных планов к i. Если найдется тарифный план i с взносом P_i и величиной социальных субсидий s_i, которые удовлетворяют неравенствам:*

$$A\delta^{\tau_k} - P_k(1-\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}),$$

$$P_i s_i(1-\delta^{\tau_i}) \leq P_j s_j(1-\delta^{\tau_j}),$$

$$P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}+s_i(1-\delta^{\tau_i})) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i} \geq P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}+s_j(1-\delta^{\tau_j})) - K(1-\delta)\delta^{\tau_j}, -$$

то к линейке $\mathcal{A}$ можно добавить данный тарифный план i, не уменьшив выигрышей всех агентов.

Несмотря на то что выигрыши государства и банка зависят от ставки субсидий, суммарный выигрыш от нее не зависит. Для выполнения неравенств необходимо, чтобы суммарный выигрыш банка и государства на тарифном плане i был не меньше аналогичного выигрыша на тарифном плане j:

$$P_i(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},i}}) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i} \geq P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) - K(1-\delta)\delta^{\tau_j}.$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Функция* $\mathcal{D} = P(1-\delta^{\tau+\tau_{\text{кр}}}+s(1-\delta^{\tau})) - K(1-\delta)\delta^{\tau}$ *при ограничениях* $P_{min} \leq P \leq P_{max}$, $s_{min} \leq s \leq s_{max}$ *достигает своего минимального (максимального) значения при* $P = P_{min}(P_{max})$, $s = s_{min}$ *или* s_{max}.

Доказательство. Прежде всего данная функция непрерывно зависит от параметров. Кроме того, коэффициент при P положительный, а значит, экстремального значения функция достигнет при граничном значении P.

Зависимость от s не столь очевидна, так как P зависит от s. Если использовать формулу для взноса P, получим равенство

$$D = K\frac{1-\delta^{\tau+\tau_{\text{кр}}}+s(1-\delta^{\tau})}{s\tau + \dfrac{(1+p)((1+p)^{\tau}-1)}{p} + \dfrac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}-1}{c(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}}} - K(1-\delta)\delta^{\tau}.$$

Ясно, что функция $\mathcal{D}$ также будет монотонно зависеть от s. При разных значениях p, c, τ, $\tau_{\text{кр}}$ функция может как монотонно убывать, так и монотонно возрастать, но в любом случае экстремальное значение принимается на границе допустимых значений. ■

Зафиксируем взнос P_i на тарифном плане i и введем следующие обозначения: S_i –множество возможных значений s_i при данном значении P_i; $\underline{s}_i$ и $\bar{s}_i$ – минимальный и максимальный элементы множества S_i (так как оно ограничено и замкнуто, то они обязательно существуют).

Определим максимальное значение выигрышей банка и государства от тарифного плана i при фиксированном взносе P_i:

$$\tilde{D}(P_i) = \max_{s_i \in S_i}\{P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}+s_i(1-\delta^{\tau_i})) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i}\},$$

$$\tilde{D}(P_i) = \max_{s_i \in S_i}\{-P_i s_i(1-\delta^{\tau_i})\}.$$

Из леммы 6 и очевидной монотонности функции $\tilde{D}(P_i)$ следует утверждение, показывающее, как найти значения $\tilde{D}(P_i)$, $\tilde{G}(P_i)$.

Утверждение 3.

$$\tilde{D}(P_i) = \max\{P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i}, P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}+\underline{s}_i(1-\delta^{\tau_i})) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i}\},$$

$$\tilde{G}(P_i) = -P_i\underline{s}_i(1-\delta^{\tau_i}).$$

Теперь мы можем сформулировать критерий для нахождения нового тарифного плана i.

Утверждение 4. *Предположим, что в данных выше обозначениях найдется тарифный план с номером i и взносом P_i так, что выполняются следующие неравенства:*

1) $A\delta^{\tau_k} - P_k(1-\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_\iota+\tau_{\text{кр},i}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}})$,

$$P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i} \geq P_i(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) - K(1-\delta)\delta^{\tau_j};$$

2) $\tilde{\mathcal{D}}(P_i) \geq \tilde{\mathcal{D}}(P_j)$;

3) $\tilde{G}(P_i) \geq \tilde{G}(P_j)$.

Тогда найдется тарифный план i, при добавлении которого к линейке $\mathcal{A}$ ни один из агентов не проиграет.

Доказательство. Прежде всего из условия 1 следует два факта. Во-первых, все возможные тарифные планы с номером i и взносом P_i допустимы. Во-вторых, для всех таких планов суммарный выигрыш банка и государства больше, чем для любого тарифного плана с номером j и взносом P_j.

Рассмотрим план с номером i, взносом P_i, на котором достигается выигрыш банка $\tilde{\mathcal{D}}(P_i)$. Согласно утверждению 3 субсидии на этом плане равны $\overline{s}_i$ или $\underline{s}_i$. Во втором случае в качестве искомого плана подойдет план с субсидиями $\underline{s}_i$: на нем выигрыши банка и государства больше.

Рассмотрим оставшийся случай: на плане с номером i, взносом P_i и максимальным выигрышем банка субсидии равны $\overline{s}_i$. Если на этом плане выигрыш государства также больше $\tilde{G}(P_j)$, то можно взять данный план в качестве искомого. Пусть теперь выигрыш государства на плане i меньше, чем $\tilde{G}(P_j)$. Тогда будем непрерывно уменьшать субсидии на плане i, не меняя взноса. В силу непрерывности найдется такое значение s_i субсидий, что выполняется равенство

$$G_i = -P_i s_i (1-\delta^{\tau_i}) = \tilde{G}(P_j).$$

Но так как $G_i + \mathcal{D}_i \geq \tilde{G}(P_j) + \tilde{\mathcal{D}}(P_j)$ по условию 1, получаем, что $\mathcal{D}_i \geq \tilde{\mathcal{D}}(P_j)$. Отсюда в качестве искомого можно взять план с взносом P_i и значением субсидий s_i. ■

Покажем, как применять утверждение 4 на примере краснодарских линеек. Пусть значения выигрышей агентов при данных значениях определяются данными, представленными в табл. 2.

Таблица 2. Данные для конкретного значения взноса

№ линейки	Взнос, P	Время накопления, τ	Общий выигрыш государства и агента, $\tilde{\mathcal{D}}+\tilde{G}$	Максимальное значение выигрыша банка, $\tilde{\mathcal{D}}$	Выигрыш потребителя, $\mathcal{Q}$	Параметры тарифного плана		
						$p_{\text{год}}$, %	$c_{\text{год}}$, %	s, %
1	18 900	24	1371	1371	8718	2	13,5	0,005
2	17 735	24	752	1347	9337	2	13,5	22,7
3	15 627	36	858	1275	8457	2	13,5	12,5
4	15 400	36	730	1272	8586	2	13,5	16,5
5	15 000	36	503	1263	8813	2	13,5	23,9
6	14 076	36	–20	877	9337	2	11	30
7	12 552	48	144	1173	8457	2	12,7	30
8	12 100	48	–126	864	8729	2	10,4	30
9	10 000	60	–514	472	8457	2	13,5	30

Рассмотрим пример применения теоремы 2. Покажем, что для несплошной краснодарской линейки можно добавить недостающий тарифный план так, чтобы выигрыши всех агентов не уменьшились. Для этого рассмотрим разные случаи.

1. Добавляем тарифный план на 4 года. Всегда можно взять план с номером 7, т.е. с условием $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_5$. Для такого плана $\mathcal{D}_4 + G_4 > \mathcal{D}_5 + G_5$. А так как максимальная прибыль банка больше, чем у тарифного плана на 5 лет, данный план будет выгодней для государства и банка.

2. Добавляем тарифный план на 3 года. Берем план с минимально возможным взносом, т.е. таким, чтобы $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3$. Покажем, что все агенты не проиграют от этого. Для потребителя это выполнено. Далее есть два варианта.

2А. $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3$, $P_4 < 12100$. Так как $P_3 \geq 14076 > 12100 > P_4$, то $\mathcal{D}_3 + G_3 \geq (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G})(14076 = = -20 > -126 = (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G}(12100) > \mathcal{D}_2 + G_2$. Но при этом $\mathcal{D}_3 \geq \tilde{\mathcal{D}}(14076) = 877 > 864 = = \tilde{\mathcal{D}}(12100) > \mathcal{D}_2$. Отсюда по утверждению 4 новый тарифный план удовлетворяет всем условиям.

2Б. $P_4 < 12100$. Если тарифный план с $P_3 = 15000$ допусти́м, то рассмотрим его, иначе возьмем план с минимально допустимым взносом, т.е. $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3$. Тогда последний будет больше 15000. В этом случае $\mathcal{D}_3 + G_3 = (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G})(15000) = 503 > 144 = (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G})(12500) > \mathcal{D}_2 + G_2$. Но при этом $\mathcal{D}_3 > \tilde{\mathcal{D}}(15000) = 1263 > 1173 = \tilde{\mathcal{D}}(12500) > \mathcal{D}_2$. Тогда по утверждению 4 новый тарифный план удовлетворяет всем условиям.

3. Добавляем тарифный план на 2 года. Как и в предыдущем случае, рассмотрим два варианта.

3А. $P_3 < 15400$. В этом случае рассмотрим тарифный план с минимально возможным взносом $P_2 = 17735$. Он допусти́м, так как $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1$. Тогда $\mathcal{D}_2 + G_2 > (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G})(17735) = 752 > 730 = = (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G})(15400) > \mathcal{D}_3 + G_3$, $\mathcal{D}_2 > \mathcal{D}(17735) = 1347 > 1272 = \tilde{\mathcal{D}}(15400) > \mathcal{D}_3$. И по утверждению 4 новый тарифный план удовлетворяет всем условиям.

3Б. Если же $P_3 > 15400$, то возьмем тарифный план с $P_2 = 18900$. Он допусти́м, так как $\mathcal{Q}_3 \leq 8586 < 8718 = \mathcal{Q}_2$. Далее проверяем те же неравенства, что и в предыдущих случаях: $\mathcal{D}_2 + G_2 = 1371 > 858 = (\tilde{\mathcal{D}} + \tilde{G})(15627) > \mathcal{D}_3 + G_3$, $\mathcal{D}_2 = 1371 > 1275 = \tilde{\mathcal{D}}(15627) > \mathcal{D}_3$. Все случаи разобраны. ■

12. ВЫВОДЫ И ДАЛЬНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Подведем итоги. Мы ввели определение линейки, описали полезные свойства и выигрыши агентов через параметры системы при некоторых ограничениях на линейку. Кроме того, был доказан закон сохранения и показаны взаимосвязи полезных свойств линейки. Найдено необходимое и достаточное условие правильности линейки в терминах выигрышей агентов на каждом тарифном плане. Было показано, что для описания эффективных линеек достаточно рассматривать справедливые эффективные линейки и для них были выписаны достаточные условия на сплошноту (с точностью до эквивалентности).

Доказанные утверждения существенно упрощают поиск эффективных линеек: их достаточно искать среди справедливых и сплошных. Можно приблизительно описать границы эффективных линеек. В статье приведены два примера эффективной линейки. Первый пример (разд. 10) – линейка с максимальным выигрышем потребителя. Для нее достаточно на каждом промежуточном тарифном плане взять такой взнос, чтобы выигрыш потребителя совпадал с максимально возможным. Второй пример: построена линейка, у которой сумма выигрышей государства и банка также максимальна. Для этого нужно знать функцию распределения потребителей, так как при увеличении взноса сумма выигрышей государства и банка также увеличивается, а число потребителей уменьшается. Поэтому здесь ситуация более сложная. При этом любая линейка, у которой сумма выигрышей государства и банка равна максимально возможному значению, будет эффективна.

Имея два таких примера эффективных линеек, можно представить, что любая эффективная линейка расположена между ними.

Для полноты картины можно исследовать, как изменится система, если у участников разный параметр дисконтирования. В частности, что будет делать банк, если ставки дисконта, инвестиций и внешнего займа окажутся разными? В этом случае ставки на взнос и кредит будут играть значительную роль, и поэтому их нельзя будет варьировать, как в рассмотренном случае.

В качестве еще одного направления для исследования можно предложить возможность убирать некоторые жесткие ограничения. В частности, взнос P не обязательно равен выплатам по кредитам B, достаточно требовать выполнения неравенства $P \geq B$. Также можно попробовать изменять и размер контракта: понятно, что более состоятельные потребители хотят покупать более дорогие квартиры. Тут, правда, возникает сложность, так как надо более аккуратно определить полезность потребителя.

Для исследования эффективных линеек мы рассматривали только самые простые преобразования: меняли параметры одного или двух соседних ТП. На самом деле для проверки эффективности можно исследовать изменения нескольких тарифных планов. Здесь надо будет использовать свойства функции распределения.

Мы рассмотрели линейки в достаточно общем виде. В частности, мы не задавали ограничения на промежуточные тарифные планы, что, в принципе, не совсем правильно. К примеру, можно было бы рассчитать эффективный процент для каждого ТП и потребовать, чтобы при увеличении времени накопления эффективный процент увеличивался. Также стоит отметить, что мы рассмотрели самую простую модель, которая не учитывает инфляции, а также различных издержек банка: на обслуживание счетов, страховки и.т.п.

Все изложенные вопросы представляются интересными направлениями дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

За февраль в Донском регионе выдано более 2 тыс. ипотечных кредитов (2015). [Электронный ресурс] // *Аргументы и факты*. Режим доступа: http://www.rostov.aif.ru/money/1485116, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2015 г.).

Ильинский Д.Г., Полтерович В.М., Старков О.Ю. (2014а). Линейки ссудо-сберегательных тарифных планов: обобщение идеи стройсберкасс // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 4. С. 71–89.

Ильинский Д.Г., Полтерович В.М., Старков О.Ю. (2014б). Разработка и исследование ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования: динамическая модель // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 2. С. 35–58.

Накопительная ипотека (2015). [Электронный ресурс] Ипотечное агентство Югры. Режим доступа: http://www.ipotekaugra.ru/gosprogrammpage/nakopitel_naya_ipoteka_msmsm/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2015 г.).

Обзор жилищных программ 2015 в Обнинске (2015). [Электронный ресурс] *Недвижимость Калужской области*. Режим доступа: http://www.informetr.ru/journal/market/6970/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2015 г.).

Полтерович В.М., Старков О.Ю. (2007). Формирование ипотеки в догоняющих экономиках: проблема трансплантации институтов. М.: Наука.

Полтерович В.М., Старков О.Ю. (2010). Поэтапное формирование массовой ипотеки и рынка жилья. В кн.: «*Стратегия модернизации российской экономики*». СПб.: Алетейа.

Полтерович В.М., Старков О.Ю. (2011). Проектирование выхода из институциональной ловушки (на примере ипотеки в России). [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.mirkin.ru/index.php?option=com_content task=view id=1839 Itemid=270, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: октябрь 2013 г.).

С начала года Сбербанк в Башкирии выдал около трех тысяч жилищных кредитов. (2015). [Электронный ресурс] Информационное агентство Башинформ. Режим доступа: http://www.bashinform.ru/news/718345-s-nachala-goda-sberbank-v-bashkirii-vydal-okolo-trekh-tysyach-zhilishchnykh-kreditov/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2015 г.).

Laux H. (2005). Die buasparfinanzierung. Die finanziellen aspekte des bausparvertrages als spar- und kreditinstrument. 7 Auflage. Frankfurt am Main: Verlag Recht and Wirtschaft GmbH.

Plaut P.O., Plaut S.E. (2004) The Economics of Housing Saving Plans // *The Journal of Real Estate Finance and Economics*. Vol. 28. No. 4. P. 319–337.

Schlueter T., Soenke Sievers and Thomas Hartmann-Wendels (2015). Bank Funding Stability, Pricing Strategies and the Guidance of Depositors // *Journal of Banking & Finance*. Vol. 51. No. C. P. 43–61.

Scholten U. (2000). Rotating Savings and Credit Associations in Developed Countries: The German-Austrian Bausparkassen // *Journal of Comparative Economics*. Vol. 28. No. 2. P. 340–363.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Il'inskiy D.G., Polterovich V.M., Starkov O.Yu. (2014b). Designing and Analyzing the Programs of Contractual Savings for Housing: a Dynamic Model. *Economics and Mathimatical Methods* 50, 2, 35–58.

Il'inskiy D.G., Polterovich V.M., Starkov O.Yu. (2014a). Lines of Savings and Loan Tariff Plans: a Generalization of the Bausparkasse Concept. *Economics and Mathimatical Methods* 50, 4, 71–89.

Laux H. (2005). Die buasparfinanzierung. Die finanziellen aspekte des bausparvertrages als spar- und kreditinstrument. 7 Auflage. Frankfurt am Main: Verlag Recht and Wirtschaft GmbH.

Nakopitelnaja ipoteka (2015). Ipotechnoe agenstvo Yugry. Available at: http://www.ipotekaugra.ru/gosprogrammpage/nakopitel_naya_ipoteka_msmsm/ (accessed: July 2015, in Russian).

Obzor zhilischnix programm v Obninske (2015). Nedvizhimost' Kaluzhskoy oblasti. Available at: http://www.informetr.ru/journal/market/6970/ (accessed: July 2015, in Russian).

Plaut P.O., Plaut S.E. (2004). The Economics of Housing Saving Plans. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 28, 4, 319–337.

Polterovich V.M., Starkov O.Yu. (2007). Creating Mortgage Markets for a Catching up Economy: a Problem of Institutional Transplantation. Moscow: Nauka.

Polterovich V.M., Starkov O.Yu. (2010). Poetapnoe formirovanie massovoi ipoteki i rinka zhilja. In: "*Strategy of Modernization of the Russian Economy*". Polterovich V.M. (ed.). SPb.: Aleteya.

Polterovich V.M., Starkov O.Yu. (2011). Proektirovanie vihoda iz institutsionaljnoi lovushki (na primere ipoteki v Rossii). Available at: http://www.mirkin.ru/index.php?option=com_content task=view id=1839 Itemid=270 (accessed: July 2015, in Russian).

S nachala goda Sberbank v Baschkirii vidal okolo treh tyisjach zhilischnih kreditov (2015). Informatsionnoe agenstvo Bashinform. Available at: http://www.bashinform.ru/news/718345-s-nachala-goda-sberbank-v-bashkirii-vydal-okolo-trekh-tysyach-zhilishchnykh-kreditov/ (accessed: July 2015, in Russian).

Schlueter T., Soenke Sievers and Thomas Hartmann-Wendels (2015). Bank Funding Stability, Pricing Strategies and the Guidance of Depositors. *Journal of Banking & Finance*, 51,C, 43–61.

Scholten U. (2000). Rotating Savings and Credit Associations in Developed Countries: The German-Austrian Bausparkassen *Journal of Comparative Economics*, 28, 2, 340–363.

Za fevralj v donskom regione vidano bolee 2 tyis. ipotechnih kreditov (2015). *Argumenty I Fakty*. Available at: http://www.rostov.aif.ru/money/1485116 (accessed: July 2015, in Russian).

Поступила в редакцию
27.07.2015 г.

Lines of Savings and Loan Tariff Plans: Properties

D.G. Ilinskiy

In article Ilinskiy, Polterovich, Starkov (2014a) we investigate the transition from the saving and loan programs of mortrage to modern institutes. The concept of LSTP (Lines of Savings and Loan Tariff Plans) was introduced. The parameters of LSTP are realizing the "smooth" changing from subsidizing plans to commercial. The following properties were observed: fairness, fullness, rightness, local rightness, effectiveness. In this paper we analyse connections between this properties for wide class of LSTP. We find the profit of agents using the LSTP in terms of parameters. We prove, that the concepts rightness and local rightness are equivalent. We show that effective LSTP can be changed by effective fairness LSTP with same profit of agents. The conditions on effective LSTP to be full are found. Results show that we can simplify the finding of effective (Pareto-optimal) LSTP.

Keywords: mortgage, line of savings and loan plans.

JEL Classification: D02, D14, G21.